# $1^{\underline{a}}$ Prova - Introdução a teoria ergódica

7 de outubro de 2025

Universidade Federal do Rio de Janeiro

**Questão 1** (**2 p**). Seja $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ um sistema dinâmico não singular, $A \subset X$

$$\eta(x) := \min\{n \geq 1 : T^n(x) \in A\} < \infty$$

para $\mu$-q.t.p. $x \in A$. Mostre que $T$ conservativa implica que $T_A$ é conservativa.

---

**Solução 1.** Seja $W$ um conjunto $T_A$-errante. Então, para $x \in W$,

$$\sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_W \circ T^n(x) = \sum_{n\geq 0} \mathbf{1}_W \circ T_A^n(x) = 1.$$

Ou seja, $T$ não é conservativo.

---

**Questão 2** (**2 p + 2 p**). Seja $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $T : X \to X$, $(x_0x_1x_2\ldots) = (x_1x_2\ldots)$ e $\mu$ uma medida de probabilidade $T$-invariante. Além disso, suponha que existe $C \geq 1$ tal que, para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \{0,1\}$ $(i = 0, \ldots, m+n-1)$,

$$\mu([a_0 \ldots a_{n+m-1}]) = C^{\pm 1}\mu([a_0 \ldots a_{n-1}])\mu([a_n \ldots a_{n+m-1}]).$$

a) Mostre que, para quaisquer $B \in \mathscr{B}$ e $a_0 \ldots a_{n-1} \in \{0,1\}$ que

$$\mu([a_0 \ldots a_{n-1}] \cap T^n B) = C^{\pm 1}\mu([a_0 \ldots a_{n-1}]\mu(B).$$

b) Mostre que $(X, \mathscr{B}, \mu, T)$ é exato.

*Notação.* $a = C^{\pm 1}b$ significa que $C^{-1}a \leq b \leq CA$. Além disso, $[a_0 \ldots a_{n-1}] := \{(x_i) \in X : a_0 = x_0, \ldots a_{n-1} = x_{n-1}\}$, para $n \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \{0,1\}$ $(i = 0, \ldots n-1)$.

---

**Solução 2.** a) Seja $B$ mensurável e $\mu(B) > 0$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, existem cilindros disjuntos $w_1, ..., w_k$ tal que, para $B^* := \bigcup w_j$, $\mu(B \Delta B^*) < \epsilon$. Então,

$$\begin{aligned}\mu(T^{-n}B^* \cap [a_0 \ldots a_{n-1}]) &= \sum_j \mu([[a_0 \ldots a_{n-1}]] \cap T^{-n} w_j) = C^{\pm 1}\mu([a_0 \ldots a_{n-1}])\sum_j \mu([w_j]) \\ &= C^{\pm 1}\mu([a_0 \ldots a_{n-1}])\mu(B^*).\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}&\mu((T^{-n}B^* \cap [a_0 \dots a_{n-1}])\Delta(T^{-n}B \cap [a_0 \dots a_{n-1}]))\\ &= \mu(T^{-n}(B\Delta B^*) \cap [a_0 \dots a_{n-1}]) \le \mu(B\Delta B^*) \le \mu(T^{-n}(B\Delta B^*)) < \epsilon.\end{aligned}$$

Como $\epsilon$ é arbitrária,

$$\mu([a_0 \dots a_{n+m-1}]) = C^{\pm 1}\mu([a_0 \dots a_{n-1}])\mu([a_n \dots a_{n+m-1}]).$$

.

b) Seja $A \in \bigcap T^{-n}(\mathscr{B})$. Então, existem $A_n \in \mathscr{B}$ com $A = T^{-n}(A_n)$. Daí, $T^n A = A_n$ e

$$\begin{aligned}\mu(A \cap [a_0 \dots a_{n-1}]) &= \mu(T^{-n}(A_n) \cap [a_0 \dots a_{n-1}])\\ &= C^{\pm 1}\mu(A_n)\mu([a_0 \dots a_{n-1}]))\\ &= C^{\pm 1}\mu(T^{-n}A_n)\mu([a_0 \dots a_{n-1}]))\\ &= C^{\pm 1}\mu(A)\mu([a_0 \dots a_{n-1}]))\end{aligned}$$

Em aproximar $A^c$ com cilindros, obtemos que

$$0 = \mu(A \cap A^c) = C^{\pm 1}\mu(A)(1 - \mu(A)).$$

Ou seja $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$.

---

**Questão 3. (2p + 2p + 2p)** Seja $X = \mathbb{T}^2$, $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ e $\beta = \ell_1\alpha + 2\pi\ell_2$, para um $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, e

$$T : (\mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2,\ \exp(it_1), \exp(it_2)) \mapsto (\exp(it_1 + i\alpha), \exp(it_2 + i\beta)).$$

a) Determine todas as $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que existe uma função $h \in L^2(\text{Leb})$ tal que $h \circ T = \lambda h$.
b) Determine, para $h \in L^2(\text{Leb})$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j.$$

c) Determine a decomposição ergódica de $T$.

*Observação.* Para $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2$, define $\varphi_{\mathbf{k}} : (\exp(it_1), \exp(it_2)) \mapsto \exp(i\langle \mathbf{k}, (t_1, t_2)\rangle)$. Então, pela analíse de Fourier, $\mathscr{E} := \{\varphi_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ é base ortogonal de $L^2(\text{Leb})$.

---

**Solução 3.** a) Para $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, ,

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{k}} \circ T(e^{it_1}, e^{it_2}) &= e^{i\langle \mathbf{k}, (t_1+\alpha, t_2+\beta)\rangle}\\ &= e^{i\langle \mathbf{k}, \mathbf{t}\rangle} e^{i\langle \mathbf{k}, (\alpha, \ell_1\alpha + 2\pi\ell_2)\rangle} = \varphi_{\mathbf{k}}(e^{it_1}, e^{it_2}) e^{i\alpha\langle \mathbf{k}, (1, \ell_1)\rangle} e^{ik_2 2\pi\ell_2}\\ &= \varphi_{\mathbf{k}}(e^{it_1}, e^{it_2}) e^{i\alpha\langle \mathbf{k}, (1, \ell_1)\rangle}.\end{aligned}$$

Como $\mathscr{E}$ é uma base ortogonal, o conjunto dos $\lambda$ é dado por $\{\exp(i\langle \mathbf{k}, (\alpha, \ell_1\alpha)\rangle) : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$.

b) Para obter o limite,discutiremos duas abordagens diferentes.

(a) **Analise de Fourier**. Usando $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$ obtém-se que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi_{\mathbf{k}} \circ T^j(e^{it_1}, e^{it_2}) &= \frac{1}{n}\varphi_{\mathbf{k}}(e^{it_1}, e^{it_2}) \sum_{j=0}^{n-1} e^{ij\langle \mathbf{k},(\alpha,\ell_1\alpha)\rangle} \\
&= \frac{1}{n}\begin{cases} n\varphi_{\mathbf{k}}(e^{it_1}, e^{it_2}) & : \quad \langle \mathbf{k},(\alpha,\ell_1\alpha)\rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \varphi_{\mathbf{k}}(e^{it_1}, e^{it_2}) \frac{e^{in\langle \mathbf{k},(\alpha,m\alpha+n)\rangle}-1}{e^{i\langle \mathbf{k},(\alpha,m\alpha+n)\rangle}-1} & : \quad \langle \mathbf{k},(\alpha,m\alpha+n)\rangle \notin 2\pi\mathbb{Z} \end{cases} \\
&= \varphi_{\mathbf{k}}(e^{it_1}, e^{it_2}) \begin{cases} 1 & : \quad \langle \mathbf{k},(1,\ell_1)\rangle = 0 \\ \frac{1}{n}\frac{e^{in\langle \mathbf{k},(\alpha,m\alpha+n)\rangle}-1}{e^{i\langle \mathbf{k},(\alpha,m\alpha+n)\rangle}-1} & : \quad \langle \mathbf{k},(1,\ell_1)\rangle \neq 0 \end{cases} \\
&\xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} \varphi_{\mathbf{k}}(e^{it_1}, e^{it_2}) & : \quad \langle \mathbf{k},(1,\ell_1)\rangle = 0 \\ 0 & : \quad \langle \mathbf{k},(1,\ell_1)\rangle \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

No entanto, $\langle \mathbf{k},(1,\ell_1)\rangle = 0 \iff k_1 = -\ell_1 k_2$. Ou seja, pelo anterior,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} h \circ T^j = \pi(h),$$

onde $\pi$ é a projeção ortogonal ao espaço gerado por $\{\varphi_{-k\ell_1,k} : k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) **Decomposição ergódica**. Seja $\pi : \mathbb{T}^2 \to [0,1/\ell)$ definido por $\pi(\exp it_1, \exp it_2) = x$ se e somente se existe $s \in \mathbb{R}$ tal que $(\exp it_1, \exp it_2) = (\exp(ix+s), \exp(i\ell s))$. Então, pela decomosição ergódica,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(\exp it_1, \exp it_2) = \int f dm_{\pi(\exp it_1, \exp it_2)},$$

para $m_x$ como em (c).

c) Para obter a decomposição ergódica, discutiremos duas abordagens diferentes.

(a) **Argumento global:** Note que

$$T^n(e^{it_1}, e^{it_2}) = (e^{i(t_1+n\alpha)}, e^{i(t_2+n\ell\alpha)}).$$

Daí, o conjunto

$$E_{t_1,t_2} := \left\{\left(e^{i(t_1+s)}, e^{i(t_2+\ell s)}\right) : s \in \mathbb{R}\right\}$$

é $T$-invariante. Note que, se $\ell \in \mathbb{N}$, então $E_{t_1,t_2}$ é uma curva fechada em $\mathbb{T}^2$. Portanto, $E_{t_1,t_2}$ é topologicamente um círculo, e a restrição

$$T : E_{t_1,t_2} \to E_{t_1,t_2}$$

é uma isometria que preserva a orientação. Ou seja, $T$ é uma rotação.
Como $\alpha/\pi \notin \mathbb{Q}$, obtém-se que $T : E_{t_1,t_2} \to E_{t_1,t_2}$ é uma rotação unicamente ergódica. Além disso,

$$\mathbb{T}^2 = \dot{\bigcup}_{t\in[0,1/\ell)} E_{t,0}.$$

Seja $m_t$ a medida de Lebesgue normalizada em $E_{t,0}$ (isto é, $\mathrm{d}m_t := \frac{1}{\sqrt{\ell^2+1}}\operatorname{Leb}_{E_{t,0}}$, ) e seja $\lambda$ a medida de Lebesgue normalizada em $[0,1/\ell)$ (isto é, $\mathrm{d}\lambda := \ell\operatorname{Leb}_{[0,1/\ell)}$). Com estas definições, é fácil ver que

$$\mathrm{dLeb}_{\mathbb{T}^2} = \mathrm{d}m_t\,\mathrm{d}\lambda(t)$$

é uma desintegração da medida de Lebesgue em $\mathbb{T}^2$. Como as medidas $m_t$ são ergódicas, a unicidade da decomposição ergódica implica que $\mathrm{d}m_t\,\mathrm{d}\lambda(t)$ é precisamente a decomposição ergódica.

(b) **Argumento local:** Note que

$$\langle \mathbf{k},(1,\ell)\rangle = k_1 + k_2\ell = 0$$

implica que $\varphi_{\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}\circ T$. Além disso, para $t_i, s_i \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_{(-k\ell,k)}(e^{it_1},e^{it_2}) = \varphi_{(-k\ell,k)}(e^{is_1},e^{is_2}) \iff -k\ell(t_1-s_1)+k(t_2-s_2)\in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Ou seja, para $|t_i - s_i|$ suficientemente pequenos, isso é equivalente a

$$\ell(t_1-s_1) = t_2 - s_2.$$

Portanto, $t_2$ como função de $t_1$ tem derivada igual a $\ell$. Consequentemente, $E_{t_1,t_2}$ é $T$-invariante.

---

**Questão 4. (2p)** Seja $(X,\mathscr{B},\mu)$ um espaço de probabilidade, $T: X\to X$ mensurável tal que $\mu = \mu\circ T^{-1}$. Mostre que $T$ é ergódica se e somente se, para qualquer $f\in L^1(\mu)$,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\hat{T}^n(f) = \int f\,d\mu \quad q.t.p.$$

---

**Solução 4.** Suponha que $T$ seja ergódico. Pelo teorema da convergência dominada, o teorema de Birkhoff e a ergodicidade de $\mu$, para $f\in L^1(\mu)$ e $g\in L^\infty(\mu)$,

$$\lim_n \frac{1}{n}\int\sum_{k=0}^{n-1}\hat{T}^n(f)g\,\mathrm{d}\mu = \lim_n\frac{1}{n}\int f\sum_{k=0}^{n-1} g\circ T^k\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu\int g\,\mathrm{d}\mu.$$

Seja $A := \{x : \limsup_n \frac{1}{n}\int\sum_{k=0}^{n-1}\hat{T}^n(f)(x) > \int f\,\mathrm{d}\mu\}$. Então, se $\mu(A)>0$ e $g := \mathbf{1}_A/\mu(A)$, pelo anterior e o Lemma de Fatou,

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_n\frac{1}{n}\int\sum_{k=0}^{n-1}\hat{T}^n(f)g\,\mathrm{d}\mu = \limsup_n\frac{1}{n}\int\sum_{k=0}^{n-1}\hat{T}^n(f)g\,\mathrm{d}\mu \geq \int\limsup_n\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\hat{T}^n(f)g\,\mathrm{d}\mu$$
$$> \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

Daí, ergodicidade implica que

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\hat{T}^n(f) = \int f d\mu \quad q.t.p..$$

Do outro lado, suponha que $T$ não seja ergódica. Então, existe uma função não-constante com $f = f\circ T$. Note que, para $g \in L^\infty$

$$\int \hat{T}(f) g \mathrm{d}\mu = \int f g\circ T \mathrm{d}\mu = \int f\circ T g\circ T \mathrm{d}\mu = \int f g \mathrm{d}\mu.$$

Daí, $\hat{T}(f) = f$ e

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\hat{T}^j(f) = f.$$

---