



Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise Real / Cálculo Avançado I (MAA740), 2025-1
Manuel Stadlbauer

Questão 2.14. Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de medida nula e $\epsilon > 0$. Mostre que existe uma sequência (C_n) de cubos tal que

- a) $\bigcup_n C_n \supset E$,
- b) $\sum_n \text{vol}(C_n) < \epsilon$.

2.3 Mudança de variáveis

Questão 2.15. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $F : A \rightarrow B$ de classe C^1 .

- a) Mostre que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(F(B_r(x)))}{\text{vol}(B_r(x))} = |\det D_x F|.$$

- b) Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Determine

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-n} \int_{B_r(x)} f d\text{vol}$$

2.4 Diferenciabilidade (continuação)

Questão 2.16. Discute a diferenciabilidade de $(x, y) \mapsto \sqrt{|xy|}$ e $(x, y) \mapsto |xy|$.

Questão 2.17. Seja $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 tal que $\det D_x F \neq 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$.

- a) Mostre que F manda abertos em abertos (ou seja, F é uma aplicação aberta)
- b) Mostre que F não é necessariamente injetor.

Questão 2.18. a) Determine a n -ésima derivada de $x \mapsto e^{-1/x}$ em 0.

- b) Seja $\epsilon > 0$. Construa uma função suave $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ tal que $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ e $f(x) = 1$ para $x \geq \epsilon$.

Questão 2.19. Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ um mapa diferenciável e sejam $x, y \in A$ tal que a reta de x a y está contida em A . Mostre que existe um z nesta reta tal que $f(y) - f(x) = D_z f(y - x)$.

Questão 2.20. Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : A \rightarrow B$ de classe C^1 e $x \in A$ com $D_x(f)$ sobrejetor. Mostre que f é localmente inversível em x e determine a derivada de f^{-1} em $f^{-1}(x)$.