Universidade Federal do Rio de Janeiro
Análise Real / Cálculo Avançado I (MAA740), 2025-1
Manuel Stadlbauer

2 Derivadas e integrais

2.1 Diferenciabilidade

Questão 2.1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \le x^3$. Decide se f é duas vezes diferenciável em 0.

Questão 2.2. Mostre que

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é diferenciável em $(0,0)$ mas que as derivadas parciais não são contínuas.

Questão 2.3. Seja $f : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto de classe C^1 tal que sempre $\det Df \neq 0$. Mostre que f é uma aplicação aberto: imagens de abertos são abertos.

Questão 2.4 $(*)$**.** Mostre que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 não é injetora.

Questão 2.5 $(*)$**.**

a) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Mostre que a função $x \mapsto \dim(\mathrm{Im} D_x(f))$ é localmente não decrescente.
b) Uma função é denotada *semicontínua superiormente* em x_0 se, para cada $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $f(x) \le f(x_0) + \epsilon$ para qualquer $x \in B_\delta(x_0)$. Mostre que $x \mapsto \dim(\mathrm{Im} D_x(f))$ é semicontínua superiormente.

Questão 2.6. Utilize os polinômios de Taylor de grau 1 e 2 para obter um critério necessário e um critério suficiente para $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ter um máximo local em 0.

Questão 2.7. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável tal que $\partial f/\partial u > 0$ para qualquer $u \in S^{n-1}$. Mostre

a) que f assume um mínimo em $\{x : \|x\| < 1\}$, e
b) que existe um ponto crítico em $\mathbb{R}^n$.

2.2 Integração

Definição *Diz-se qe $A \subset \mathbb{R}^n$ tem conteúdo nulo se, para cada $\epsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ e retângulos $R_1, \ldots, R_m$ tal que $A \subset \bigcup_i R_i$ e $\sum_i \mathrm{vol} T_i < \epsilon$.*

Questão 2.8. Suponha que (A_n) é uma sequencia de conjuntos de medida nula. Mostre que $\bigcup_n A_n$ tem medida nula.

Questão 2.9 $(*)$**.**

a) Suponha que A tem conteúdo nulo. Mostre que ∂A tem conteúdo nulo.
b) Suponha que A tem medida nula. Decide se ∂A tem medida nula.

Questão 2.10. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{O}$ uma cobertura por abertos. Mostre que existe uma subcobertura enumerável de A.

Questão 2.11. Determine as seguintes integrais.

a) $\int e^{-x^2-y^2} dx dy$

b) $\int e^{-x^2} dx$

Questão 2.12 $(*)$**.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente. Mostre que os pontos de descontinuidade tem medida nula.

Questão 2.13. Seja $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ contínua e $\partial f / \partial y$ contínua, e $F(y) := \int_a^b f(x,y) dx$. Mostre que

$$\partial F / \partial y = \int_a^b \partial f / \partial y dx.$$