

Integração

Partições:

A ideia fundamental da Integral de Riemann são partições e a convergência de somas superiores.

No entanto, note que as partições utilizadas para definir a Integral não são partições de verdade:

Def. Seja X um conjunto e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Então,

$\mathcal{A}$ é partição de $X \Leftrightarrow X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e

$A \cap B = \emptyset \quad \forall A, B \in \mathcal{A}, A \neq B.$

Aplicações:

- " $\sim$ " relação de equivalência

$\Leftrightarrow \{[x] : x \in X\}$ é partição ($[x] := \{y : y \sim x\}$)

- Rohlin partitions & desintegração de medidas.

Agora, a versão da Integração

Def. Suponha que $a_i < b_i \quad (1 \leq i \leq n)$.

Então,

$$Q := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

é um retângulo. Além disso,

$$\text{vol}(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

Uma partição (no sentido de integração de Riemann) P de Q é um conjunto finito $\{a_i^{(j)} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n(i)\}$

tal que $a_i = a_i^{(0)} < a_i^{(1)} < \dots < a_i^{(n(i))} = b_i \quad \forall i$.

~~Uma partição P de Q é um conjunto finito $\{a_i^{(j)} : 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n(i)\}$~~

Observação: Q é a união dos retângulos da forma $\prod_{i=1}^n [a_i^{(j_{i-1})}, a_i^{(j_i)}]$, mas os retângulos não são 1-2 disjuntos.

Definição: ① Uma subpartição de P (Partição de Q)

é uma partição R de Q tal que $R \supset P$.

② Dado duas partições P, R de Q , então $P \cup R$ é o refinamento comum de $P \cup R$,

③ Seja P uma partição de Q . Então,

então que $R \in P$ se existe (j_i) :

$$R = \prod_{i=1}^n [a_i^{(j_{i-1})}, a_i^{(j_i)}]$$

(4) Seja $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ limitado. Então, para ~~qualquer~~ ~~qualquer~~ partição de P , define

$$S(f, P) := \sum_{R \in P} \text{vol}(R) \sup \{ f(x) : x \in R \}$$

$$I(f, P) := \quad \quad \quad \inf \quad \quad$$

Lemma: Suponha que $\bar{P}$ é subpartição de P .

Então, para $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ limitado,

$$S(f, P) \geq S(f, \bar{P}) \geq I(f, \bar{P}) \geq I(f, P).$$

(*) (**)

Prova: (Estrutura)

(1) Mostre que, $\forall R \in P$

$$\text{vol}(R) = \sum_{\bar{R} \in \bar{P}, \bar{R} \subset R} \text{vol}(\bar{R})$$

(2) O resultado acima implica (*). □

Corolário: Sejam $P, \bar{P}$ partições. Então

$$S(f, P) \geq I(f, \bar{P}).$$

Prova: Aplique o Teo. a $P \cup \bar{P}$. □

Definição: Seja Q retângulo e $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.

Então,

$$\begin{aligned}\bar{\int}_Q f \, dx &= \inf \left\{ \sum_{P \in \mathcal{P}} \text{vol}(P) \sup \{f(x) : x \in P\} : P \text{ partição} \right\} \\ \underline{\int}_Q f \, dx &= \sup \left\{ \sum_{P \in \mathcal{P}} \text{vol}(P) \inf \{f(x) : x \in P\} : P \text{ partição} \right\}.\end{aligned}$$

Note que, pelo cálculo, $\infty > \bar{\int}_Q f \, dx \geq \underline{\int}_Q f \, dx > -\infty$. Daí,

as integrais superiores e inferiores sempre ~~sejam~~ são finitas.

Dizemos que $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ ~~limitada~~ é Riemann-integrável se

f é limitada e $\bar{\int}_Q f \, dx = \underline{\int}_Q f \, dx$.

Teorema (Caracterização de Riemann)

f é Riemann integrável $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P$ (partição de Q)

tal que $\sum_{A \in P} \text{vol}(A) \left(\sup_A f - \inf_A f \right) < \varepsilon$.

Prova:

" $\Leftarrow$ " Pelo lema, segue que $\bar{\int} f - \underline{\int} f < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \bar{\int} f = \underline{\int} f.$$

" $\Rightarrow$ " Escolha P, Q partições tais que

$$\left| \sum_{A \in P} \text{vol}(A) \sup_A f - \bar{\int} f \right| < \varepsilon, \quad \left| \sum_{A \in Q} \text{vol}(A) \inf_A f - \underline{\int} f \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow P \cup Q = R$ é uma subpartição de P e Q

$$\Rightarrow \left| \sum_{A \in Q} \text{vol}(A) \sup_A f - \bar{\int} f \right| < \varepsilon \quad \text{e} \quad \left| \sum_{A \in P} \text{vol}(A) \inf_A f - \underline{\int} f \right| < \varepsilon$$

$$\text{Como } \bar{\int} f = \underline{\int} f : \sum_{A \in R} \text{vol}(A) (\sup_A f - \inf_A f) < 2\varepsilon$$

$\square$

Exemplos

Proposição: Se $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então f é Riemann integrável.

Prova: Como Q é compacto, $-\infty < \min_Q f \leq \max_Q f < \infty$.

Seja dado, f é uniformemente contínua $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y: d(x, y) \leq \delta$.

Escolha $\mathcal{P}$ tal que $\text{diam}(A) \leq \delta \quad \forall A \in \mathcal{P}$.

(por ex., $\text{diam}\left(\frac{1}{n} [0, \sqrt{n+1}]\right) = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} = \delta$). Daí,

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \text{vol}(A) (\sup_A f - \inf_A f) \leq \sum_{A \in \mathcal{P}} \text{vol}(A) \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \text{vol}(Q).$$

Daí, pelo critério de Riemann, f é integrável. $\square$

Ex. 1 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Não é integrável. Prova: Def.

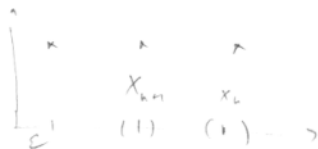
(2) Seja (x_n) sequência em $[0, 1], x_n \rightarrow 0$. Então,

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1], x \mapsto \begin{cases} 1 & \exists n: x = x_n \\ 0 & \nexists n: x = x_n \end{cases}$$

é integrável.

Prova: Seja $\varepsilon > 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$:

$$x_n \in [0, \varepsilon] \quad \forall n \geq N.$$



$$\text{Definir } \delta := \frac{1}{3} \min \{ |x_n - x_m| : n, m \leq N \}, \quad e$$

$$\delta^* := \min \left\{ \delta, \frac{\varepsilon}{N} \right\}$$

$$\mathcal{P} := \left\{ x_n + \delta^* : n \leq N, x_n + \delta^* > \varepsilon \right\} \cup \left\{ x_n - \delta^* : n \leq N, x_n - \delta^* > \varepsilon \right\} \cup \{0\} \cup \{\varepsilon\}$$

Então, para $I = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cap (\varepsilon, 1]$

$$\sum_{A \in \mathcal{P}} \text{vol}(A) (\sup_A f - \inf_A f)$$

$$= \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}, \\ A \cap I = \emptyset}} \text{vol}(A) (\sup_A f - \inf_A f) + \sum_{\substack{A \in \mathcal{P}, \\ A \cap I \neq \emptyset}} \text{vol}(A) (\sup_A f - \inf_A f) + \text{vol}([0, \varepsilon])$$

$$= 0 + \sum_{A \cap I \neq \emptyset} \text{vol}(A) (\sup_A f - \inf_A f) + \text{vol}([0, \varepsilon])$$

$$\leq 0 + N \cdot \frac{\varepsilon}{N} + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \square$$

Definição: Seja $A \subset \mathbb{R}^1$. Dizemos que A tem medida zero se $\forall \varepsilon > 0 \exists$ uma cobertura ^{enumerável} de A por retângulos

$Q_1, Q_2, \dots$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(Q_i) < \varepsilon$$

Proposição:

① Se $A \subset B$ e B tem medida zero $\Rightarrow A$ tem medida zero

② Se $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e os A_i tem medida zero $\Rightarrow A$ tem med. zero.

③ Seja Q retângulo com $\text{vol}(Q) > 0$.

Então ∂Q tem medida zero.

Teorema: Seja Q retângulo e $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.

Então, f é Riemann-integrável $\Leftrightarrow$

$\{x \in Q \mid f \text{ não é contínua em } x\}$ tem medida nula.

Para do lema

$$D := \{x \in \mathbb{Q} : f \text{ n\~ao \acute{e} cont\~ua em } D\}$$

$$M := \sup_{\mathbb{Q}} |f(x)|$$

Suponha que $\text{vol}(D) = 0$. Dado $\forall \varepsilon > 0 \exists$ ret\~angulos abertos

$$(Q_i) \text{ tal que } D \subset \bigcup_i Q_i \text{ e } \sum \text{vol}(Q_i) < \varepsilon.$$

Agora, seja $\delta > 0$, pea ser determinada depois. Como f \acute{e} cont\~ua em D^c . $\forall x \notin D \exists$ um ret\~angulo aberto

R_x tal que

- $x \in R_x$
- $|f(y) - f(x)| < \delta \quad \forall y \in R_x \cap \mathbb{Q}.$

Como $\mathbb{Q}$ \acute{e} compacto, existe $x_1, \dots, x_m$ e $i_1, \dots, i_n$ tal que

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{j=1}^m R_{x_j} \cup \bigcup_{j=1}^n Q_{i_j}$$

Seja $\mathcal{P}$ a parti\~cao gerada por $\{Q_{i_1}, \dots, Q_{i_n}, R_{x_1}, \dots, R_{x_m}\}$.

Ent\~ao,

$$S(f, \mathcal{P}) - I(f, \mathcal{P})$$

$$= \sum_{\substack{R \in \mathcal{P} \\ R \subset \bigcup Q_{i_j}}} \text{vol}(R) \underbrace{\left(\sup_R f - \inf_R f \right)}_{< 2M} + \sum_{\substack{R \in \mathcal{P} \\ R \not\subset \bigcup Q_{i_j}}} \text{vol}(R) \underbrace{\left(\sup_R f - \inf_R f \right)}_{< 2\varepsilon}$$

$$< 2M\varepsilon + 2\delta \text{vol}(\mathbb{Q})$$

On seja, dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ arbitr\~ario, basta escolher $\varepsilon = \frac{1}{4M} \tilde{\varepsilon}$,

$$\delta := \frac{\text{vol } \mathbb{Q}}{4M}.$$

Continuidade.

Seja $\delta > 0$. Então, p.a. $x \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{osc}(f, x, \delta) &:= \sup \{ f(y) : |x-y| < \delta \} - \inf \{ f(y) : |x-y| < \delta \} \\ &= \sup \{ f(y_1) - f(y_2) : y_1, y_2 \in B_\delta(x) \}. \\ &\quad (\text{a } \delta\text{-oscilação de } f \text{ em } x) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \text{osc}(f, x) = \inf_{\delta > 0} \text{osc}(f, x, \delta).$$

Fato. f contínua em $x \iff \text{osc}(f, x) = 0$.

Integrabilidade $\Rightarrow$ Continuidade

Seja $m \in \mathbb{N}$ e $D_m := \{ x : \text{osc}(f, x) \geq \frac{1}{m} \}$.

Basta provar que $\text{vol}(D_m) = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$ e P partição tal que $S(f, P) - I(f, P) < \varepsilon$.

Vamos decompor D_m :

$$(1) \quad D_m^{(1)} := D_m \cap \bigcup_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$$

$$(2) \quad D_m^{(2)} := D_m \setminus D_m^{(1)} = \{ x \in D_m : \exists \mathbb{R} \text{ t.q. } x \in \text{int } \mathbb{R} \}$$

Como $\bigcup_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ tem ~~medida~~ ^{medida} zero, $D_m^{(1)}$ tem medida zero. Do outro lado

$$\varepsilon > S(f, P) - I(f, P)$$

$$\geq \sum_{\mathbb{R} : \mathbb{R} \cap D_m^{(2)} \neq \emptyset} \text{vol}(\mathbb{R}) \cdot \underbrace{\sup_{\mathbb{R}} f - \inf_{\mathbb{R}} f}_{\geq \frac{1}{m}} \quad (*)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{\mathbb{R} : \mathbb{R} \cap D_m^{(2)} \neq \emptyset} \text{vol}(\mathbb{R})$$

Ou seja, a cobertura dos dois aquies pontos cobrir os pontos de $D_m^{(2)}$ de volume arb. pequeno.

Resta verificar (*):

Se $x \in \mathbb{R} \cap D_m^{(2)}$, $\exists \delta > 0 : B_\delta(x) \subset \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}} f - \inf_{\mathbb{R}} f \geq \sup_{B_\delta(x)} f - \inf_{B_\delta(x)} f \geq \frac{1}{m}$$

□

Fubini's theorem

- Motivação:
- Determinar integrais em várias variáveis
 - Princípio do ~~de~~ Cavalieri.

Teorema: Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^n$ retângulos e $f: A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Se f é $\mathbb{R}$ -integral, então as funções

$$x \mapsto \int_B f(x, y) dy, \quad x \mapsto \int_A f(x, y) dx$$

são integrais e

$$\int_{A \times B} f \, dx \, dy = \int_A \left(\int_B f \, dy \right) dx = \int_A \left(\int_B f \, dy \right) dx.$$

Aplicação:

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]^2} e^{xy} \, dx \, dy &= \int_0^1 \left. \frac{1}{x} e^{xy} \right|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} e^x - \frac{1}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{x} (e^x - 1) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!} \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Prova: Seja $\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_B$ partições de A e B , resp.

Note que, para $R \in \mathcal{P}_A, Q \in \mathcal{P}_B$:

$$\inf_{R \times Q} f(\cdot, \cdot) \leq \inf_Q f(x, \cdot) \quad \forall x \in R$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{R, Q} \text{vol}(R \times Q) \inf_{R \times Q} f &\leq \sum_{R, Q} \text{vol}(R) \text{vol}(Q) \inf_{x \in R} \inf_{y \in Q} f(x, y) \\ &= \sum_R \text{vol}(R) \sum_Q \text{vol}(Q) \inf_{x \in R} \inf_{y \in Q} f(x, y) \\ &\leq \sum_R \text{vol}(R) \inf_{x \in R} \underbrace{\sum_Q \text{vol}(Q) \inf_Q f(x, \cdot)}_{I(f(x, \cdot), \mathcal{P}_B)} \\ &\leq I(I(f(\cdot, \cdot), \mathcal{P}_B), \mathcal{P}_A) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I(f, \mathcal{P}_A \times \mathcal{P}_B) \leq \dots$$

$$\Rightarrow \int_{A \times B} f \leq \int_A \left(\int_B f(x, y) dy \right) dx.$$

Do mesmo jeito:

$$\int_{A \times B} f \, dx \, dy \geq \int_A \left(\int_B f(x, y) \, dy \right) dx$$

Pela integrabilidade de f :

$$\begin{aligned} \int_{A \times B} f \, dx \, dy &\geq \inf_R \underbrace{S\left(\inf_Q S(f(x, \cdot), Q), R\right)}_{= \int_B f(x, y) \, dy} \geq \sup_Q \underbrace{I\left(\sup_R \dots, R\right)}_{= \int_B f(x, y) \, dy} \geq \int_{A \times B} f \, dx \, dy \end{aligned} \quad \square$$

Corolários:

(1) Se f é $\mathbb{R}$ -integrável, então

$$\int_{A \times B} f \, dx \, dy = \int_A \left(\int_B f \, dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f \, dx \right) dy$$

(2) Se f é $\mathbb{R}$ -integrável e $x \mapsto \int f(x, y) \, dy$ e $y \mapsto \int f(x, y) \, dx$ são $\mathbb{R}$ -integráveis, então

$$\int_{A \times B} f = \int_A \int_B f = \int_B \int_A f \quad \square$$

Generalizações e Construções imediatas

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e
 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada.

Dizemos que f é integrável se,

Para um retângulo $R \subset \mathbb{R}^n$ com $R \supset S$

$$\bar{f}(x) := \begin{cases} 0 & : x \notin S \\ f(x) & : x \in S, \end{cases}$$

$\bar{f}$ para $\bar{f}$ é integrável. Neste caso, $\int_S f = \int_R \bar{f}$

Observação: A definição não depende da
escolha de R !

Teorema: Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ limitado e ~~função~~ integrável

$f, g: S \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Então:

① Se $f \leq g$, então $\int f \leq \int g$

② $|\int f \, dvol| \leq \int |f| \, dvol$.

③ Se $S = S_1 \cup S_2$ e $\int_{S_1}, \int_{S_2}$ são integráveis,

① f é integrável sobre S e $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ e

então ② $\int_S f \, dvol = \int_{S_1} f \, dvol + \int_{S_2} f \, dvol - \int_{S_1 \cap S_2} f \, dvol$.

④ $f \mapsto \int f \, dvol$ é linear.

Para 1,4 são óbvios, 2 é corolário de 1 + um pouco trabalho.

(3) Para mostrar que $f: S_1 \cup S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $f: S_1 \cap S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ são mesuráveis basta usar um argumento simples de refinamento comum. Para provar o resultado, basta aplicar a linearidade a

$$f \cdot \mathbb{1}_{S_1 \cup S_2} = f \cdot \mathbb{1}_{S_1} + f \cdot \mathbb{1}_{S_2} - f \cdot \mathbb{1}_{S_1 \cap S_2} \quad \square$$

Obs.

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases} \quad \text{é a indicadora de } A.$$

Corolário. Suponha que $S_1, \dots, S_n$ são conjuntos limitados tal que $\text{vol}(S_i \cap S_j) = 0 \quad \forall i \neq j$. Então,

para $f: \bigcup_{i=1}^n S_i \rightarrow \mathbb{R}$ integrável:

$$\int_{\bigcup S_i} f \, d\text{vol} = \sum_{S_i} \int_{S_i} f \, d\text{vol}$$

~~Extensão para conjuntos~~

Conjuntos rectificáveis

Uma aplicação da teoria é na noção mais ampla de volume. Para defini-la, note que

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$$

é a função indicadora do conjunto A .

Def. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitada. Então, A é rectificável se a função $\mathbb{1}_A$ é $\mathbb{R}$ -integrável.

Neste caso: $\text{vol}(A) := \int \mathbb{1}_A \, d\text{vol}$ (Medida de Jordan contínuo)

Teorema. (1) A rectificável $\Leftrightarrow \partial A$ tem medida nula.

(2) Se A, B são rectificáveis, então

$$\text{vol}(A \cup B) = \text{vol}(A) + \text{vol}(B) - \text{vol}(A \cap B)$$

Para: (1) Teorema de Lebesgue.

(2) Concluído da ~~teorema anterior~~ anterior $\square$

Observação. Aplicando o corolário anterior a função $\mathbb{1}$,
medida / conteúdo de
obtem-se que o ~~volume de~~ ~~Pierson~~ Jordan
é finitamente aditivo.

Propriedades de integral

Terceira:

Integrais impróprias

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$. Dizemos que f é integrável se

$$\sup_{R \text{ compacto}} \int_R f \, dvol < \infty.$$

Não disso, dizemos que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se

f_+ e f_- são integrais ($f_+ = \max\{f(x), 0\}$, $f_- = -\min\{f(x), 0\}$)

Neste caso: $\int f \, dvol = \int f_+ \, dvol - \int f_- \, dvol.$

Observação: A integral estendida satisfaz as mesmas condições que a ~~inte~~ integral exterior.

Mudança de variáveis

Preparação: Partição da Unidade.

Ideia: ~~localizar~~ "Localizar" os argumentos em

utilizar funções $\varphi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow [0,1]$ tal que $\sum \varphi_i(x) = 1$,
e as funções tem um comportamento bom.

Lemma: Seja $Q \subset \mathbb{R}^n$ retângulo. Então, existe

$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi \in C^\infty$ tal que

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0 & \forall x \in \text{int } Q \\ \varphi(x) = 0 & \forall x \notin \text{int } Q. \end{cases}$$

Prova: Defina

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Vamos mostrar que $f \in C^\infty$. Defina

$$\mathcal{C} := \left\{ x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{x^k} e^{-1/x} : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, x > 0 \right\}.$$

Para $g \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{x^k} e^{-1/x} \\ &= a_0 \frac{1}{x^0} e^{-1/x} + \sum_{k=1}^n a_k \left(-\frac{1}{x^{k+1}} e^{-1/x} + \frac{1}{x^k} e^{-1/x} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g' \in \mathcal{C}.$$

$$\text{Além disso, } \forall g \in \mathcal{C} : \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \sum a_k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x}}{x^k} = 0$$

$$\Rightarrow g \in C^\infty, \text{ pois } g \in \mathcal{C}.$$

$$\text{Além disso } f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Para $R = \prod [a_i, b_i]$, define

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i - a_i) \cdot f(b_i - x_i)$$

Dai, se $x \in \prod (a_i, b_i) = \text{int}(R)$, todos os termos são positivos $\Rightarrow \varphi(x) > 0$.

Do outro lado, se $\exists i : x_i \notin (a_i, b_i)$... $\square$

Lema Seja $\mathcal{U}$ uma coleção de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$, e seja $A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Então, existem retângulos $R_1, R_2, R_3, \dots$ tais que

- (1) $\forall i \in \mathbb{N} \exists U \in \mathcal{U} : R_i \subset U$.
- (2) $A = \bigcup_i \text{int}(R_i)$
- (3) Para qualquer $x \in A : \# \{ R_i : x \in R_i \} < \infty$

Obs: ~~consequncia~~

- Propriedades 1, 2 caracterizam "cobertura subordinada a $\mathcal{U}$ "
- 3 caracteriza "localidade finita".

Cusho de (R_i)

Primeiro Passo

Escolha uma seqüência (D_i) de compactos tal que

$$(1) \quad D_i \subset \text{int}(D_{i+1}) \quad \forall i$$

$$(2) \quad \bigcup_i D_i = A$$

[Cobertura com ~~todos~~ retângulos cujos diâmetros $r_n, r_n > 0, \dots$]

Defina $B_i := D_i \setminus \text{int}(D_{i+1})$, que  compacto.

Note que $B_i \cap B_{i+2} = \emptyset$ por cusho.

Para cada $x \in B_i$, escolha um retângulo cubo C_x fechado com centro x tal que $C_x \subset U$ para um $U \in \mathcal{U}$, e $C_x \subset B_{i-1} \cup B_i \cup B_{i+1}$.

A união de C_x  a coleção desejada. Para compactar, pode escolher um subconjunto finito dos C_x e a cobertura subordinada a $\mathcal{U}$  localmente finita.

Def. Dizemos que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tem suporte compacto se ...
 $\text{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ é compacto

Teorema (Partição da unidade) Seja $\mathcal{U}$ uma coleção de conjuntos abertos em $\mathbb{R}^n$. Então, existem funções $\phi_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de suporte compacto e em C^∞ tal que

- ① $\phi_i(x) \in [0, 1] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } i \in \mathbb{N}.$
- ② $\forall i: \exists U \in \mathcal{U} \quad \text{supp}(\phi_i) \subset U.$
- ③ $\forall x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \quad \exists \quad \forall \text{ aberto:}$
 $x \in V \text{ e } \# \{i : \text{supp } \phi_i \cap V \neq \emptyset\} < \infty.$
- ④ $\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$

Prova Use o lema para obter uma coleção de retângulos (R_i) , e o outro lema para definir ψ_i de suporte R_i .

Basta definir $\phi_i(x) := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(x) \right)^{-1} \psi_i(x) \quad \square$

Mudança de variáveis

Notações : • Mudança de variáveis

• imprescindível para a definição de formas etc.

Teorema : Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abertos e $F: A \rightarrow B$

um difeomorfismo (F, F^{-1} de classe C^1 $\Leftrightarrow F$ de classe C^1 ,
 $\det DF \neq 0$).

$f: B \rightarrow \mathbb{R}$ integrável $\Leftrightarrow f|\det DF|: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrável

Note caso : $\int_B f \, dx = \int_A f|\det DF| \, dx$

Preparação :

Lema : Suponha que $F: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ é de classe C^1
(A aberto). ~~Então~~ Se $E \subset A$ tem medida zero, então
 $F(E)$ tem medida zero.

Para : Sejam (R_n) uma ~~cobertura~~ ^{fechados} ~~cobertura~~ de E tal que $\bigcup_n R_n \supset E$

Seja $K \subset A$ compacto. Então, $\sup_K \|DF\| =: M < \infty$.

Dai, pelo TVM, $d(Fx, Fy) \leq M d(x, y)$. Dai, ~~que~~ a
imagem de qualquer conjunto de diâmetro R é contido em
um conjunto de diâmetro MR .

Por expho, a imagem de um cubo de lado ε é contido em um
cubo de lado $M\varepsilon$. ~~Se~~

Suponha que (R_n) é uma cobertura de $K \cap E$ com retângulos
tal que, para $\varepsilon > 0$ fixado, $\sum \text{vol}(R_n) < \varepsilon / (M\varepsilon)^n$.

S.p.d.g., pode-se supor que os ~~lados~~ comprimentos dos
lados dos R_n são elementos em $\mathbb{Q}$. Dai, s.p.d.g., 77
os R_n são cubos. $\Rightarrow \sum \text{vol}(f(R_n)) \leq \sum M^n \varepsilon^n \text{vol}(R_n) < \varepsilon$ □

Lema Seja $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, F de classe C^1

tal que :

- $F(0) = 0$

- $\|D_x F - Id\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in U$

$$\Rightarrow F(B_r(0)) \subset B_{(1+\varepsilon)r}(0), \text{ se } B_r(0) \subset U.$$

Prova: $F(x) = F(x) - F(0)$

$$= \int_0^1 D F|_{tx} (x) dt = \int_0^1 D F|_{tx} (x) - x dt + x \quad \square$$

Prova do Teorema

Passo 1 ~~Suponha~~ Suponha que B é limitado. Então, f é integrável

($\Rightarrow$) Os pontos de descontinuidade ^{de f} tem medida nula.

Lema $\Leftrightarrow$ " de $f \circ F$ "

$x \mapsto \det DF$ ab. $\Leftrightarrow$ " $f \circ F | \det DF|$ "

$\Leftrightarrow f \circ F | \det DF|$ é integrável (além: se A é limitado, precisa-se decompor A em partes limitadas).

Passo 2 Basta mostrar que as integrais coincidem. Seja $\varepsilon > 0$.

Modelo na decomposição podemos supor que A, B são limitados. Aliás disso, suponha que (R_n) é um partição de A , de diâmetro $< r$. Escolha $x_n \in R_n$.

Escolha $x_n \in \text{int}(R_n)$, e considere

$$G_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto x_n + D F|_{x_n} (x - x_n).$$

$$\Rightarrow H_n = G_n^{-1} \circ F \text{ é bi def. e } D H_n|_{x_n} = Id.$$

Agora, pela continuidade uniforme, pode-se escolher

$$r \text{ tal que } \|D H_n - Id\| < \varepsilon \text{ em } \overline{R_n}.$$

Lema $\Rightarrow H_n(R_n) \subset (1+\varepsilon)R_n$, onde

$(1+\varepsilon)R_n$ é a dilatação de R_n com centro x_n .



En aplicando la a $F^{-1} \circ G_n: (1+\epsilon)^{-1} R_n \rightarrow R_n$,

obtenemos

$$G_n((1+\epsilon)^{-1} R_n) \subset F(R_n) \subset G_n((1+\epsilon) R_n) = (1+\epsilon) G_n R_n$$

$$\frac{1}{(1+\epsilon)} G_n R_n.$$

Ac \$\mathbb{R}^d\$

$$\Rightarrow \text{vol}\left(\frac{1}{1+\epsilon} G_n R_n\right) \leq \text{vol}(F(R_n)) \leq \text{vol}((1+\epsilon) G_n R_n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+\epsilon)^d} \leq \frac{\text{vol}(F(R_n))}{\text{vol}(G_n R_n)} \leq (1+\epsilon)^d$$

Por lo tanto, \$G_n\$ es una aplicación afín. Así, \$\text{vol}(G_n R_n) = |\det DF|_{x_n} \cdot \text{vol}(R_n)\$

$$\Rightarrow \text{vol}(F(R_n)) = (1+\epsilon)^{\pm d} |\det DF| \cdot \text{vol}(R_n).$$

Por lo tanto,

$$\sum_n \inf_{R_n} f \cdot \mathbb{1}_{F(R_n)} \leq \sum_n \inf_{R_n} f \cdot \mathbb{1}_{(1+\epsilon)^{-1} F(R_n)} \leq \sum_n \inf_{R_n} f \cdot \mathbb{1}_{F(R_n)}$$

Argumento final (entonces definiremos la partição)

$$\sum_n \inf_{F(R_n)} f \cdot \mathbb{1}_{F(R_n)} \leq f \leq \sum_n \sup_{F(R_n)} f \cdot \mathbb{1}_{F(R_n)}$$

Soluto
(*)

$$\sum_n \inf_{R_n} f \circ F \cdot \text{vol}(F(R_n)) \leq \int_B f \, dx \leq \sum_n \sup_{R_n} f \cdot \text{vol}(F(R_n))$$

$$\frac{1}{(1+\epsilon)^d} \sum_n \inf_{R_n} (f \circ F |\det DF|) \text{vol}(R_n) \leq \int_B f \, dx \leq (1+\epsilon)^d \sum_n \sup_{R_n} (f \circ F |\det DF|) \text{vol}(R_n)$$

(*) Lemma: \$F\$ difeo \$\Rightarrow F(\partial R_n) = \partial F(R_n)\$

□
797

Variedades

Definição de uma variedade C^k

Hausdorff e "second countable"

Seja M espaço topológico e $\mathcal{U}$ uma coleção de homeomorfismos $\varphi: U_\varphi \rightarrow V_\varphi$, $U_\varphi \subset M$ abertos, $V_\varphi \subset \mathbb{R}^n$ tal que

① $M = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{U}} U_\varphi$

② Se $U_\varphi \cap U_\psi \neq \emptyset$, então

$$\varphi(U_\varphi \cap U_\psi) \xrightarrow{\varphi \circ \psi^{-1}} \psi(U_\psi \cap U_\varphi)$$

é um difeomorfismo de classe C^k .

Exemplos - ① M não necessariamente é um subespaço ^{"bon"} de $\mathbb{R}^n$,
pois $\sim M$.

Ex: $P^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}\} / \sim$ ^{acc}
 $(x, y) \sim (\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \exists \lambda: x\lambda = \bar{x}, y\lambda = \bar{y}.$

② Um os mapas φ para introduzir uma estrutura diferencial em M .

Exemplo:

$$M = \mathbb{P}^1,$$

$$\varphi_1: \{(x, y): x > 0\} / \sim \rightarrow (0, \pi), \quad (x, y) \mapsto \arccos \frac{y}{x}$$

$$\varphi_2: \{(x, y): y > 0\} / \sim \rightarrow (0, \pi), \quad (x, y) \mapsto \arctan \frac{x}{y}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

No entanto: O Teorema de Whitney diz que qualquer variedade de dim n pode ser visto como subvariedade de $\mathbb{R}^{2n}$.

Ou seja, vamos super neste curso que $M \subset \mathbb{R}^{2n}$, para evitar as definições sofisticadas das seções tangentes e cotangentes.

Integridade em variedades, parte I

Exemplo. Suponha que $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Qual o "volume" de $B := \left\{ \sum t_i v_i : t_i \in [0, 1] \right\}$?

Construção. (1) Suponha que $v_1, \dots, v_k$ são lin. indep.

Então, existe uma base ON $\{e_1, \dots, e_k\}$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$\text{span} \{e_1, \dots, e_k\} = \text{span} \{v_1, \dots, v_k\}.$$

Ou seja, basta definir

$$\begin{aligned} V_k(B) &:= \text{vol} \left(\left\{ \sum_{i=1}^k t_i a_{ij} e_j : t_i \in [0, 1] \right\} \right), \\ &= |\det A|, \end{aligned}$$

$$\text{onde } v_i = \sum a_{ij} e_j, \quad A = (a_{ij}).$$

Def. $V_k(v_1, \dots, v_k) := V_k(B)$.

Teorema: O mapa vol_k é bem definido.

o valor não depende da escolha da base ON.

Prova: Qualquer aplicação linear que muda na base ON

a na outra base ON tem determinante ± 1 181

De fato, existe uma fórmula explícita:

Seja $v_1, \dots, v_k$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Então $(v_j = (v_j^{(i)} : i=1, \dots, n))$

$$V_k(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \left(\det \left(v_{i_j}^{(i)} \right)_{i,j} \right)^2}$$

Para - Ver Anexos.

Obs. No caso $k=n$, $V_k(A) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$.

Definição: Seja $A \subset \mathbb{R}^k$ aberto e $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Defina, para $f: \varphi(A) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int f \, d\text{vol}_{\varphi(A)} := \int_A f \circ \varphi \cdot V_k(D\varphi) \, d\text{vol}. \quad (*)$$

Observações:

- (*) é que a mudança de variáveis

- Para $f = 1$, escreve-se

$$\text{vol}_k(\varphi(A)) := \int_A V_k(D\varphi) \, d\text{vol}$$

- Para obter que $\varphi(A)$ é variedade, precisamos garantir que $\varphi: A \rightarrow \varphi(A)$ é imersão! Localmente, basta saber que $\text{rank}(D\varphi) = k$ e aplicar o teorema do posto / rank

Teorema (o volume é bem-def.)

Seja $F: A \rightarrow B$ difeomorfismo de classe C^1 ,
 $A, B \subset \mathbb{R}^k$ abertos e $\varphi: B \rightarrow \mathbb{R}^k$ de classe C^1 .
Além disso, suponha que $f: \varphi(B) \rightarrow \mathbb{R}$ é
limitada. Então, $f \circ V_k(D\varphi)$ é integrável e o
seu valor é $f \circ F \circ V_k(D\varphi \circ F)$ é integrável.

Neste caso:

$$\int_B f \circ \varphi V_k(D\varphi) \, dvol = \int_A f \circ \varphi \circ F V_k(D\varphi \circ F) \, dvol$$

Para. A equivalência da integrabilidade é na consequência
da prova de mudança das variáveis.

Para aplicar o teorema da mudança das variáveis

(i.e. $\int_{G(u)} g \, dvol = \int_u g \circ G |\det DG| \, dvol$),

basta verificar que $(g = f \circ \varphi V_k(D\varphi))$

$$V_k(D\varphi \circ F) = V_k(D\varphi) \circ F |\det DF| :$$

No entanto, pela regra da cadeia e da teoria acima:

$$\begin{aligned} V_k(D\varphi \circ F) &= V_k((D\varphi) \circ F DF) \\ &= V_k((D\varphi) \circ F) |\det DF|, \end{aligned}$$

Pela definição de V_k .

□