O teorema de Stone-Weierstrass

Objetivo: Mostre que polinómios são densos nas funções contínuas (Weierstrass) + generalizações (Stone).

Para avançar, precisa-se de mais conceitos da topologia:

Def (Propriedades de separação), $(X,\mathcal{J})$ espaço top.

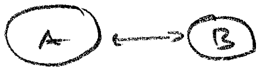
1) Tychonov: Para $u,v \in X$ $\exists\, U$ aberto: $u \in U$ e $v \notin U$.

   (Obs: $\iff$ $\{u\}$ fechado $\forall\, u \in X$).

2) Hausdorff: Para $u,v \in X$, $u \neq v$ $\exists\, U,V$ abertos: $u \in U$, $v \in V$, $U \cap V = \emptyset$.

3) Normal: Para A, B disjuntos, fechados, existem U,V abertos: $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.

Fato 1: (X,d) métrico $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{J})$ normal.

Prova: 
Para $x \notin B$, $\inf\{d(x,y) : \ , y \in B\} > 0$, pois ~~A~~ B ~~e~~ é FECHADO. Define
$U := \{x \in X : d(x,A) < d(x,B)\}$. $\square$

Fato 2: $(X,\mathcal{J})$ compacto e Hausdorff $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{J})$ normal.

Prova. Seja $u \in X$ e $A \subset X$ fechado, $x \notin A$.

Vamos mostrar que podemos separar x e A por abertos:

$\forall x \in A$, existem abertos U_x, V_x t.q.
$u \in U_x$, $A \subset V_x$, $U_x \cap V_x \neq \emptyset$.

Como A é compacto: $\exists\, x_1, \dots, x_n \in A$: $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$

$\Rightarrow$ $U := \bigcap U_{x_i}$, $V := \bigcap V_{x_i}$ separa ~~u~~ e A.

Basta repetir o argumento para a cobertura def. por

$A \subset U_x$, $B \subset V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$, para cada $x \in B$ □

Lema (URYSOHN): Sejam A, B conjuntos fechados de um espaço normal X. Então, existe $f : X \to [0,1]$ cont. tal que $f|_A = 0$ e $f|_B = 1$

Prova do Lema:

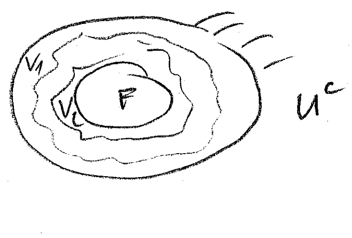
Def. Seja $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Dizemos que $\{O_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ é normalmente crescente se

1. O_λ aberto
2. se $\lambda > \mu$, então $O_\lambda \supset \overline{O_\mu}$.

Prop.: Seja X normal, F fechado e $U \supset F$ aberto.
Então, existe ~~[illegible]~~ $\Lambda \subset \mathbb{R}$ e uma família normalmente crescente $\{O_\lambda\}$ tal que

1. Λ é denso em $(0,1)$.
2. $\forall \lambda : F \subset O_\lambda \subset \overline{O_\lambda} \subset U$.

Prova: Como U é aberto, U^c é fechado. Como $F \subset U$, $U^c \cap F = \emptyset$. Pela normalidade, existem abertos $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \supset F$, $V_2 \supset U^c$.



Além disso, $\overline{V_1} \subset V_2^c \subset U$.

Define $\mathcal{O}_{1,1} := V_1$. Por indução: Suponha que

$\mathcal{O}_{k,n}$, $\mathcal{O}_{k,n+1}$ foram construídos. Então, $\overline{\mathcal{O}}_{k,n} \subset \mathcal{O}_{k,n+1}$

e existe pelo conjecto anterior $\mathcal{O}$ aberto:

$$\overline{\mathcal{O}}_{k,n} \subset \mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \mathcal{O}_{k+1,n}$$

Define $\mathcal{O}_{2k,n+1} := \mathcal{O}_{k,n}$, $\mathcal{O}_{2k+1,n+1} := \mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{2k+2,n+1} := \mathcal{O}_{k+1,n}$.

e $\lambda : (n,m) \longmapsto \frac{n}{2^m}$. Etc.

$\square$

Prova do Lema de Urysohn.

Aplique a proposição a A e B^c, e define

$$f(x) := \inf \{ \lambda : x \in \mathcal{O}_\lambda \}.$$

Basta mostrar que f é contínua: Qualquer aberto $\subset [0,1]$ é união de intervalos abertos. Cada intervalo pode ser escrito como $[0,a) \cap (b,1]$; basta mostrar que

$$f^{-1}(\{x : f(x) < a\}) \text{ e } f^{-1}(\{x : f(x) > b\}) \text{ são abertos.}$$

(1) $\{f(x) < a\} = \bigcup_{\lambda < a} \mathcal{O}_\lambda$ aberto.

(2) $\{f(x) > b\} = \{x : \exists\, \lambda_x > b : x \in \mathcal{O}_{\lambda_x},\ x \notin \mathcal{O}_b\}$

$= \{x : \quad " \quad x \notin \overline{\mathcal{O}}_b\}$

$= \bigcup_{\lambda > b} \mathcal{O}_\lambda \setminus \overline{\mathcal{O}}_b$ $\qquad \square$

O teorema de Stone-Weierstrass

① **Weierstrass:** $\forall f \in C([a,b])$, $\varepsilon > 0$ $\exists$ polinomio p tal que

$$\sup \{ |f(x) - p(x)| : x \in [a,b] \} < \varepsilon.$$

Algebras de funções: Seja X Hausdorff e compacto. Então, $\mathcal{A} \subset C(X)$ é uma algebra real se

① $\mathcal{A}$ é subespaço linear

② se $f, g \in \mathcal{A}$, então $f g \in \mathcal{A}$.

Dizemos que $\mathcal{A}$ separa pontos se, para qualquer $x, y \in X$ $\exists f \in \mathcal{A}$: $f(x) \neq f(y)$.

② **Stone-Weierstrass:** Suponha que $\mathcal{A} \subset C(X)$ é uma algebra real que separa pontos e que $1 \in \mathcal{A}$, e suponha que X é compacto e Hausdorff. Então, $\mathcal{A}$ é denso em $C(X)$.

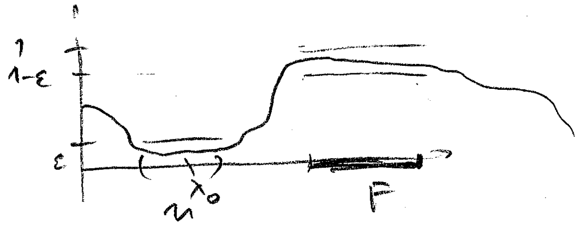
Corolário: Weierstrass.

Prova. Os polinómios formam uma algebra, e funções lineares separam pontos. $\square$

Lema: Na hipótese do teorema: Seja $F \subset X$ fechado e $x_0 \notin F$.

Então, existe U aberto, $x_0 \in U$, $U \cap F = \emptyset$ tal que, para cada $\varepsilon > 0$, existe $h \in \mathcal{A}$ tal que:

1) $h(X) \subset [0,1]$
2) $h(x) < \varepsilon \quad \forall x \in U$
3) $h(x) > 1-\varepsilon \quad \forall x \in F$.



Prova:

(1) Seja $y \in F$. Então, como $\mathcal{A}$ separa pontos, $\exists f_y \in \mathcal{A}$: $f_y(y) \neq f_y(x_0)$. Define

$$g_y(x) := \left(\frac{f_y(x) - f_y(x_0)}{\| f_y - f_y(x_0) \|_\infty} \right)^2 \in \mathcal{A}$$

$$N_y := \{ x : g_y(x) > 0 \}, \quad y \in N_y.$$

Pela compacidade de F, existe $y_1, \ldots, y_n \in F$ tais que $\cup N_{y_i} \supset F$. Daí,

$$g := \frac{1}{\| \Sigma g_{y_i} \|_\infty} \sum_{i=1}^n g_{y_i} \in \mathcal{A},$$

$$g(x_0) = 0, \quad g(x) > 0 \quad \forall x \in F; \quad g(x) \in [0,1].$$

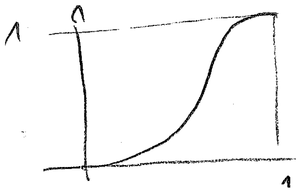
Daí, existe $c > 0$ tal que

$$g(x) \geq c \quad \forall x \in F, \quad F \cap \underbrace{\{ x : g(x) < c/2 \}}_{U} = \emptyset.$$

No entanto, para $\varepsilon > 0$, existem $n, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(x) := 1 - (1 - x^n)^m \begin{cases} \geq 1 - \varepsilon & : x \geq 1 - c \\ \varepsilon & : x < c/2 \end{cases}$$

Mas a função $x \longmapsto 1-(1-x^n)^m$ é da forma



Basta achar m, n tais que

$$\begin{cases} 1-\left(1-\left(\frac{c}{2}\right)^n\right)^m < \varepsilon \\ 1-(1-c^n)^m > 1-\varepsilon \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1-\left(\frac{c}{2}\right)^n > (1-\varepsilon)^{1/m} \\ 1-c^n < \varepsilon^{1/m} \end{cases}$$

Para n grande, $\log(1-c^n) \sim -c^n$. Ou, usando

$$-x-\frac{x^2}{2} \leq \log(1-x) \leq -x \; :$$

Temos que achar n, m:

I $\quad \log\left(1-\left(\frac{c}{2}\right)^n\right) \geq -\left(\frac{c}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^{2n} > -\frac{\varepsilon}{m} \geq \log(1-\varepsilon)^{1/m}$

II $\quad \log(1-c^n) \leq -c^n \leq \frac{1}{m}\log\varepsilon$

Ou seja Basta achar uma solução para

$$-\log\varepsilon \, \frac{\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^n\right)}{2^n} \leq m \cdot \frac{c^n}{2^n}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^n\right) < \varepsilon \; :$$

Escolhe n tal que $\exists \; \delta < \varepsilon$: $\quad 2^n = -\frac{\log\delta}{\delta} = \frac{1}{\delta}\log\frac{1}{\delta}$

Escolhe m tal que $\quad \delta\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^n\right) < m \cdot \frac{c^n}{2^n}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^n\right) < \delta$

$\Longrightarrow \; p \circ g \in \mathcal{A}$ satisfaz as

condições do lema $\square$

Lema: Suponha que A, B são fechados e disjuntos. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$ $\exists\, f : X \to [0,1]$:

$$f(x) < \varepsilon \ \forall x \in A, \quad f(x) > 1-\varepsilon \ \forall x \in B.$$

Prova: Pela compacidade e o lema anterior, existe $U_1, \dots, U_n$ abertos, disjuntos de B tal que, para qualquer $\varepsilon > 0$ $\exists\, h_i : X \to [0,1]$, $h_i|_{U_i} < \varepsilon$, $h_i|_B > 1-\varepsilon$.

Daí, para $f := \prod_{i=1}^{n} h_i$,

$$f|_{\bigcup_{i=1}^n U_i} < \varepsilon, \quad f|_B > (1-\varepsilon)^n.$$

Mas como $\varepsilon > 0$ pode ser escolhido independentemente de n, obtém-se o lema. $\square$

Prova do Stone-Weierstrass:

Seja $f \in C(X)$. Em substituir f com $(f+\min f)/\|f+\min f\|_\infty$, podemos s.p.d.g supor que $f : X \to [0,1]$.

Para $n \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le n$ defina $A_j := \{x : f(x) \le \frac{j-1}{n}\}$ e $B_j := \{x : f(x) \ge \frac{j}{n}\}$

Pelo lema, existe $g_j \in \mathcal{A}$ tais que

$$g_j|_{A_j} < \frac{1}{n}, \quad g_j|_{B_j} > 1 - \frac{1}{n}.$$

Defina $g := \frac{1}{n} \sum g_j$. Daí, para $x \in X$, $\frac{j-1}{n} < f(x) \le j/n$,

$$|g(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} + |g(x) - j/n|$$

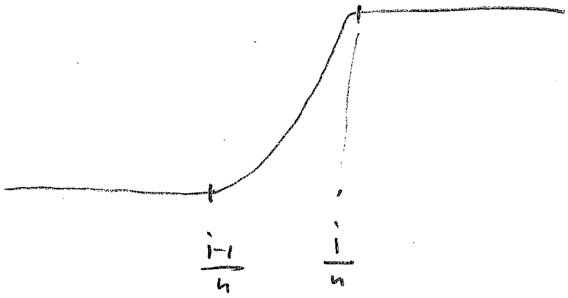
$$\le \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\Big|\sum_i g_i(x) - j\Big|$$

$$\le \frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n}\big((j-1)\cdot\tfrac{1}{n} + 1 + \tfrac{n-j}{n}\big)}$$

$$\frac{1}{n}\Big(\#\{i : i<j\} + 1 + \frac{\#\{i : i>j\}}{n} - j\Big)$$

pois

$$\le \frac{1}{n}\Big(1 + \frac{n-j}{n}\Big) \le \frac{2}{n}$$



Se $x \le \frac{j}{n} \le \frac{i-1}{n}$, $g_i(x) < \varepsilon$

Se $\frac{i}{n} \le \frac{j-1}{n} < x$, $g_i(x) > 1-\varepsilon$

Se $j-1 < i < j+1$, $g_i(x) \in [0,1]$

Ou seja, como n é arbitrário, podemos aproximar f com elementos em $\mathcal{A}$ $\square$

Generalizações:

(1) X localmente compacto,

$$C_0(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ cont. t.q. } \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \text{ compacto} : \| f|_{K^c} \|_\infty < \varepsilon \}$$

Então $\mathcal{A} \subset C_0(X)$ é denso se

(a) $\mathcal{A}$ separa pontos

(b) $\forall x \in X \ \exists f : f(x) \neq 0$.

Teorema (Riesz)

Seja $(X, \mathcal{T})$ compacto e separável. Então:

$$C(X) \text{ separável} \iff X \text{ metrizável}.$$

Prova. Seja X metrizável $\Rightarrow \exists\, d$ compatível com $\mathcal{T}$.

$\Rightarrow X$ é separável, sendo compacto, métrico, Hausdorff

Seja $\{x_n : n \geq 1\}$ conjunto denso, e

$$f_n(x) := d(x, x_n).$$

Então, $f_n \in C(X)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Para aplicar o Stone-Weierstrass, define

$$\mathcal{G} := \{ f_n : n \geq 1 \} \subset C(X)$$

$$\mathcal{A} := \langle \mathcal{G} \rangle \quad (\text{menor algebra contendo } \mathcal{G})$$

$$= \{ p(g_1, \dots, g_n) : \overset{n \in \mathbb{N},}{p} \text{ polinômio em } n \text{ variáveis com coeficientes reais}, g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G} \},$$

$$\mathcal{A}_0 := \{ p(g_1 - g_n) : \text{ - - com coeficientes em } \mathbb{Q} \text{ — } \}.$$

Por Stone-Weierstrass, usando o fato que $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ separa pontos, $\mathcal{A}$ é denso em $C(X)$

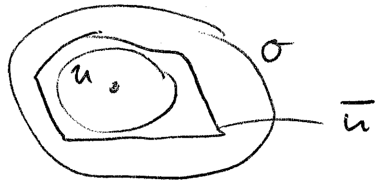
$\Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset C(X)$ denso. Mas $\mathcal{A}_0$ é separável.

Agora suponha que $C(X)$ é separável, e que $\{h_n : n \geq 1\}$ é denso. Defina

$$\mathcal{O}_n := \{x : h_n(x) > \tfrac{1}{2}\}$$

Vamos mostrar que cada aberto é união de abertos em $\{\mathcal{O}_n, n \geq 1\}$. Seja $\mathcal{O}$ aberto, $x \in \mathcal{O}$.

Como X é normal (sendo compacto + Hausdorff), existe $\mathcal{U}$ aberto : $x \in \mathcal{U} \subset \bar{\mathcal{U}} \subset \mathcal{O}$.



$$\xRightarrow{\text{Urysohn}} \exists\, g : X \to [0,1], \text{ contínua}$$

$$\text{tal que } g|_{\mathcal{U}} = 1, \quad g|_{\mathcal{O}^c} = 0$$

$$\xRightarrow{\text{Densidade}} \exists\, n : \|g - g_n\|_\infty < 1/2$$

$$\Rightarrow x \in \mathcal{O}_n \subset \mathcal{O}.$$

<u>Fato geral</u>: Second contable $\Rightarrow$ metrizável.

<u>No nosso caso</u>:

Defina $A := \{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid \bar{\mathcal{U}}_n \subset \mathcal{U}_m\}$

Seja $f_{n,m} \in C(X)$ tal que

① $f_{n,m}(X) \subset [0,1]$

② $f_{n,m}|_{\bar{\mathcal{U}}_n} = 0, \quad f_{n,m}|_{\mathcal{U}_m^c} = 1$.

Defina $d(x,y) := \sum_{n,m} \frac{1}{2^{n+m}} |f_{n,m}(x) - f_{n,m}(y)|$ $\square$

Diferenciação em $\mathbb{R}^n$

Revisão: $T : \mathcal{U} \to V$, $\mathcal{U}, V$ espaços vetoriais é linear se $T(\lambda u + v) = \lambda Tu + Tv$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathcal{U}$.

Exemplos: ① $f \in C^\infty((a,b)) \longmapsto f' \in C^\infty((a,b))$

② $f \in C([0,1]) \longmapsto \int_0^1 f(t)\,dt$

③ Se $\mathcal{U}, V$ são espaços de dimensão finita e $T : \mathcal{U} \to V$ linear, ~~fixe uma base~~ escolhe bases (e_i) de $\mathcal{U}$ e (f_i) de V e define a_{ij} tal que

$$T(e_i) = \sum a_{ij} f_j .$$

Ou seja, $\mathcal{L}(\mathcal{U}, V) \cong \mathrm{Mat}(\dim \mathcal{U} \times \dim V)$.

Teorema: Seja $\mathcal{U}, V$ espaços normados e $T : \mathcal{U} \to V$ linear. Então, são equivalentes:

① $\|T\| := \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} < \infty$

② T é Lipschitz contínua

③ T é contínua em 0.

Prova:

$1 \Rightarrow 2,3$: $\|Tu - Tv\| = \|T(u-v)\| \le \|T\|\,\|u-v\|$.

$3 \Rightarrow 1$: Seja $\varepsilon = 1$. Então, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer x, $\|x\| = \delta$, $\|Tx\| \le 1$.

$\Rightarrow \|T\| \le 1/\delta$ $\square$

Teorema Seja $\dim(\mathcal{U}) < \infty$ e $T : \mathcal{U} \to V$ linear, V normado. Então, T é contínua em relação com qualquer norma em $\mathcal{U}$ e V. Além disso, duas normas sempre são equivalentes

Prova. Escolhe uma base de $\mathcal{U}$: $e_1 - e_n$. Suponha que $\|v\| \leq 1$. Então, se $v = \sum \lambda_i e_i$ e $\|v\| = \sqrt{\sum \lambda_i^2}$, então $1 = \|v\| \geq |\lambda_i| \quad \forall i$.

$$\Rightarrow \| Tv \| \leq \sum_{i=1}^{n} \| T(\lambda_i e_i) \| \leq n \cdot \max_{i=1,-n} \|Te_i\| < \infty .$$

Basta mostrar que duas normas em $\mathbb{R}^n$ sempre são equivalentes:

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathcal{U}$; $(\lambda_1 - \lambda_n) \longmapsto \sum \lambda_i e_i$,
pelo anterior, T é contínua e injetora por construção.

Daí, como $T(\{x : \|x\| = 1\})$ é compacto e $0 \notin T(S)$,
$\exists\, \delta > 0$ tal que $B_\delta(0) \cap T(S') = \emptyset$.

$$\Rightarrow \|T^{-1}\| < 1/\delta \qquad (\text{ ! } \delta \text{ depende das normas!})$$

Daí, para normas $\| \cdot \|_\alpha$, $\| \cdot \|_\beta$ em $\mathcal{U}$; $\exists\, K, L$:

$$\|u\|_\alpha = K^{\pm 1} \|T^{-1} u\| = K^{\pm 1} L^{\pm 1} \|u\|_\alpha \qquad \square$$

Derivadas

Ideia: Aproximar funções localmente com aplicações lineares. Aqui sempre há duas ideias principais

① Derivada total / Fréchet.

Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Então, dizemos que f é derivável em $x_0 \in \mathcal{U}$ se $\exists\, Df$

$$f(x) - f(x_0) = Df\,(x - x_0) + R(x)$$

tal que ① Df é linear (e contínua)

② $\lim_{x \to 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} \to 0 \quad // \quad R(x) = o(\|x\|)$.

A generalização para espaços normados é óbvia.

(2) <u>Derivada parcial / direccional / Gateaux.</u>

Na mesma situação: Seja $v \in \mathbb{R}^n$. Então, dizemos que f é derivável na direcção de v em q se

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(f(q + tv) - f(q)\Big)$$

existe. No caso $v = e_i$ (bem pedido):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = \lim_{t \to 0} \cdots .$$

No caso de $f = (f_1, \dots, f_m)$: $\frac{\partial_i f}{\partial x_i} = \lim \frac{1}{t}\Big(f_i \cdots\Big)$

Dúvidas óbvias

(1) Df bem definido?

(2) Relacionar Df e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$?

(3) Aplicações?

<u>Facto.</u> Se f é diferenciável em p, então Df é unicamente determinado. Além disso $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$,

$$Df|_p(v) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\Big(f(p + tv) - f(p)\Big)$$

<u>Prova.</u>

$$\frac{1}{t}\Big(f(p+tv) - f(p)\Big) = \frac{1}{t}\Big(Df|_p(tv) + R(tv)\Big)$$

$$= Df|_p(v) + \underbrace{\frac{1}{t}R(tv)}_{t \to 0,\ 0} \qquad \square$$

<u>Corolário.</u> Se f é dif. em p, então a matriz de $Df|_p$ é $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$.

Teorema: Se as derivadas parciais existem e são contínuas em U então f é diferenciável em U.

Prova: Vamos provar o teorema para $f: U \to \mathbb{R}$ e $p = 0$.

Para $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1 - v_n)$ define um caminho de 0 a v:

$$\sigma_1(t) = (t v_1, 0, \dots), \quad t \in [0,1]$$
$$\sigma_2(t) = (v_1, t v_2, \text{—})$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n(t) = (v_1 \text{ — } v_{n-1}, t v_n)$$

$\Rightarrow$ $f \circ \sigma_i$ é diferenciável.

$$\overset{TVM}{\Rightarrow} f(v_1 - v_i, 0 - 0) - f(v_1 - v_{i-1}, 0 -)$$
$$= f \circ \sigma_i(1) - f(\sigma_i(0)) \quad \exists\, \xi \in [0,1]$$
$$= (f \circ \sigma_i)'(\xi)$$
$$= \cancel{\frac{\partial f}{\partial x_i}(v_1 - v_{i-1}, \xi v_i, 0 - 0) \cdot v_i} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(v_1 - v_{i-1}, \xi v_i, -)} (v_i)$$

$$\Rightarrow \overset{R(v)}{=} f(v) - f(0) - \nabla f \cdot v$$
$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{(v_1 - v_{i-1}, \xi v_i, 0 -)} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_0 \right)}_{=: E_i(v) \xrightarrow{v \to 0} 0} v_i$$

Ou seja: $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0$: $|E_i(v)| < \varepsilon \quad \forall\, v: \|v\|_1 < \delta$.

Já vimos que podemos trabalhar com qualquer norma!

$$\Rightarrow |R(v)| \leq \varepsilon \cdot \|v\|_1 \quad \forall\, \|v\| < \delta. \quad \square$$

Teorema: Sejam $f, g : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto dif. em p, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

1. $D(f + \lambda g) = Df + \lambda Dg$
2. $D(\lambda) = 0$
3. Se f é linear: $Df = f$
4. $D(\langle f, g \rangle) = \langle Df, g \rangle + \langle f, Dg \rangle$ Leibniz

---

Prova de 4:

$$\langle f(p+v), g(p+v) \rangle - \langle f(p), g(p) \rangle$$

$$= \langle f(p) + D_p f(v) + o(\|v\|), g(p) + D_p(g)v + o(\|v\|) \rangle - \langle f(p), g(p) \rangle$$

$$= \langle f, g \rangle - \cancel{\langle f, g \rangle} + \langle f(p), D_p g \cdot v \rangle + \langle f(p), o(\|v\|) \rangle + \langle D_p(f)v, g(p) \rangle$$

$$+ \langle D_p(f)v, o(\|v\|) \rangle + \langle o(\|v\|), o(\|v\|) \rangle$$

$$= \langle f(p), D_p g \cdot v \rangle + \langle D_p(f)v, g(p) \rangle + o(\|v\|).$$

Observação: Os mesmos argumentos vale para

$f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : U \to \mathbb{R}^n$ e

$\beta : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ bilinear.

A regra da cadeia:

Teorema $f: U \to \mathbb{R}^m$, $g: V \to \mathbb{R}^n$ tal que U, V abertos, $V \subset f(U)$. Seja f diferenciável em p e g dif. em $f(p)$. Então $g \circ f$ é diferenciável em p e $D(g\circ f) = Dg\big|_{f(p)} \circ Df\big|_p$.

Prova: Puramente com "little o"

$$g\circ f(p+v) - g\circ f(p)$$
$$= g\big(f(p) + Df(v) + o(\|v\|)\big) - gf(p)$$
$$= g\circ f(p) + Dg\big(Df(v) + o(\|v\|)\big) + o\big(Df(v) + o(\|v\|)\big) - g\circ f(p)$$
$$= Dg\big|_{f(p)} Df(v) + \underbrace{Dg\big|_{f(p)}\big(o(\|v\|)\big) + o\big(Df_p(v) + o(\|v\|)\big)}_{I + II}$$

Mas $\|Df(v)\| \leq \|Df\| \cdot \|v\|$, $\|Dg w\| \leq \|Dg\| \|w\|$.

$\Longrightarrow I + II = o(\|v\|)$. $\square$

Observação: Não há um teorema de valor médio. Mas:

Teorema: Seja $f: U \to \mathbb{R}^n$ dif. e $p, q \in U$ tal que $[p,q] := \{(tp + (1-t)q) : t \in [0,1]\} \subset U$.

Então:

$$\|f(p) - f(q)\| \leq \sup\{\|D_x f\| : x \in [p,q]\} \|p - q\|.$$

Prova: Considere a função $t \mapsto \|\cancel{f(p)}\, f(tp + (1-t)q) - f(q)\|$.

Derivadas de ordem superior

Porque? Taylor de ordem mais alta.

① A 2ª derivada.

Suponha que $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ é diferenciável. Então, existe

$$Df : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n) := \{ \text{aplicações lineares } \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \}.$$

Daí, a 2ª derivada é definida por

$$D_{p+v} f = D_p(f) + D_p^2 f(v) + \underbrace{o(\|v\|)}_{R(v)},$$

onde todos os elementos são aplicações lineares.

Ou seja, para $w \in \mathbb{R}^m$:

$$D_{p+v}(f)(w) - D_p(f)(w) = D_p^2(f)(v,w) + R(v,w)$$

Ou seja: ① $D_p^2 f$ é linear em v e w. Ou seja,

$D_p^2 f$ é bilinear.

② $\frac{1}{\|v\|} R(v) \xrightarrow{v \to 0} 0$ significa que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{\|v\|} \|R(v)\| \\ &= \lim_{\|v\| \to 0} \frac{1}{\|v\|} \sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|R(v,w)\|}{\|w\|} \\ &= \lim_{\|v\| \to 0} \sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|R(v,w)\|}{\|v\| \, \|w\|} \end{aligned}$$

Pelo anterior:

Teorema. Suponha que $D^2 f|_p$ existe. Então, todas as derivadas parciais

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

existem. Se todas as derivadas parciais são contínuas em U, então $D^2 f$ existe em U.

Prova: Corolário do anterior.

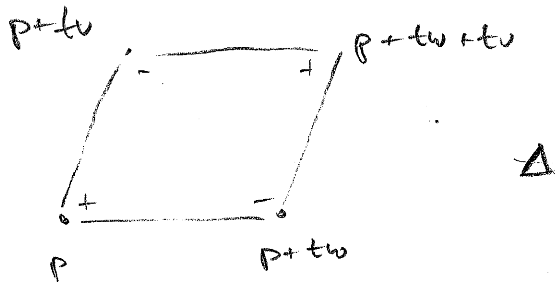
Mas tem uma relação importante com a geometria e formas quadráticas:

Teorema: Se

Então, $D^2 f|_p$ é simétrica: $D^2 f|_p (v,w) = D^2 f|_p (w,v)$.

Ou, as derivadas parciais: $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial f_k}{\partial x_j \partial x_i}$.

Prova: S.p.d.g. $f: U^a \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Considere



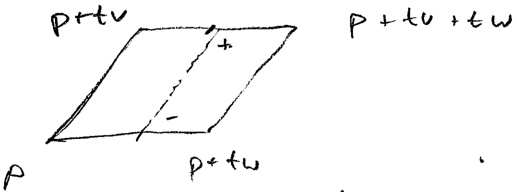
$$\Delta(t) := f(p+tw+tv) - f(p+tv) - f(p+tw) + f(p)$$

Obviamente, $\Delta(t)$ é simétrica em v, w.

Basta mostrar que

$$\boxed{D^2 f(v,w) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta(t)}{t^2}}$$

Define $g(s) = f(p + tv + stw) - f(p + stw)$, $s \in [0,1]$



Como f é diferenciável (cont.) na vizinhança de p:

$\exists\ \xi \in (0,1)$:

$$g(1) - g(0) = g'(\xi)$$

$$= Df|_{p+tv+\xi tw}(tw) - Df|_{p+\xi tw}(tw)$$

Pela definição da derivada:

$$g(1)-g(0) = Df|_{p+tv+\xi tw}(tw) - Df|_p(tw) - Df|_{p+\xi tw}(tw) + Df|_p(tw)$$

$$= D^2f|_p(tw, tv+\xi tw) - D^2f|_p(tw, \xi tw) + R_1(tw, tv+\xi tw)$$

$$+ R_2(tw, \xi tw).$$

$$= t^2\Big(\underbrace{D^2f(w, v+w) - D^2f(w,w)}_{= D^2(w,v)} + \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{t^2}}_{t\to 0} \to 0\Big)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{f(p+tv+tw) - f(p)}{t^2} = D^2(w,u)$$

Mas $\Delta(t) = g(1) - g(0)$.

Ou seja, $D^2(w,u)$ é limite de ~~uma~~ função simétrica. □

Corolários

① ~~A~~ n-ésima derivada de f, se existir, é uma aplicação n-linear.

② Se a n-ésima derivada existe, então

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} = \frac{\partial f_k}{\partial x_{\sigma(1)} \cdots \partial x_{\sigma(n)}} \quad \forall \text{ permutação } \sigma.$$

Além disso:

Teorema de Taylor.

Seja $f : U \to \mathbb{R}$ k-vezes diferenciável em $p \in U$. Então

$$f(p+h) = \sum_{j=0}^{k} \frac{D_p^j f}{j!}(h, h, \ldots, h) + o(\|h\|).$$

Prova: Considere a função $t \mapsto f(p+th)$ e aplique o teorema de Taylor em dim 1. $\square$

Os espaços C^k

Definição: ① Seja $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $n \in \mathbb{N}$. Então, para $r \in \mathbb{N}$

$$C^r(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$$
$$:= \{ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \mid D^r_x f \text{ existe e é contínua em } x \}$$
$$= \{ \quad " \quad \mid \frac{\partial g_i}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(x) \quad " \quad , \forall \; i_1, \dots i_r \in \{1, \dots m\}, \; i \in \{1, \dots n\} \}$$

Diz-se que C^r é o espaço das funções r vezes continuamente diferenciáveis.

② $C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n) := \bigcap_{r > 0} C^r$

Diz-se que C^∞ é o espaço das funções suaves ("smooth").

③ $C^\omega(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n) \subsetneq C^\infty(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções analíticas: $\forall \, q \in \mathcal{U} \;\; \exists \; \varepsilon > 0$ e $a_{..}$

$$f|_{B_\varepsilon(q)}(x_1 \dots x_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m} a_{i_1 \dots i_m} (x_1 - q_1)^{i_1} \cdots (x_m - q_m)^{i_m}.$$

Convergência em C^r

Def. Dizemos que (f_k) em C^r é uniformemente Cauchy se $\forall \, \varepsilon > 0 \;\; \exists \, N$:

$\forall \; s,t \geq N$ e $k = 0, \dots, r$:

$$\| D^k_x(f_s) - D^k_x(f_t) \| < \varepsilon .$$

Teorema. (f_k) é uniformemente Cauchy em C^r

$\iff \exists \; f \in C^r$ tal que $D^k_x(f_k) \longrightarrow D^k_x(f)$ uniformemente em x.

Aplicação:

Define $\|f\|_{C^r} := \sum_{k=0}^{r} \sup_{x\in U} \|D^k_x f\|_{(k)}$, onde $\|\cdot\|_{(k)}$ é a sua norma preferida na aplicação k-linear $D^k_x f$.

Então, $(C^r, \|\ \|_{C^r})$ é um espaço de Banach.

Prova. "$\Leftarrow$". Exercício / simples

"$\Rightarrow$". Suponha que $r = 1$. Então, por hipótese, $\exists\ f \in C^0$ tal que $f_k \to f$ uniformemente. Além disso, existe $G \in C^0(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ tal que $D_x(f) \to G_x$ uniformemente.

Aplicaremos um truque importante: integrais e convergência se complementam:

Seja $\gamma(t) := (1-t)p + tq$, para $p, q \in U$ e $\gamma(t) \in U\ \forall\ t \in [0,1]$

Então, pela regra de cadeia, para cada k:

- $D(f_k)\circ\gamma = D_{\gamma(t)} f_k \circ D\gamma = D_{\gamma(t)} f_k(q-p) \in \mathbb{R}^n$
- Para facilitar a notação: $\int_0^1 (g_1(t), \ldots, g_m(t))\,dt := \left(\int_0^1 g_1\,dt, \int_0^1 g_2\,dt, \ldots\right)$
- Como $f_k\circ\gamma(0) = f_k(p) \in \mathbb{R}^m$, $f_k\circ\gamma(1) = f_k(q) \in \mathbb{R}^m$, o teorema fundamental do cálculo implica que

$$f_k(q) - f_k(p) = \int_0^1 (f_k\circ\gamma)'(t)\,dt = \int_0^1 \left(D_{\gamma(t)} f_k(q-p)\right) dt$$

$$\Big\downarrow k\to\infty \qquad\qquad \Big\downarrow k\to\infty$$

$$f(q) - f(p) \qquad\qquad \int_0^1 \left(G_{\gamma(t)}(q-p)\right) dt$$

$$\Rightarrow f(q) - f(p) = G_p(q-p) + \underbrace{\int_0^1 \left(G_p - G_{\gamma(t)}\right) dt}_{\xrightarrow{q\to p} 0}\,(q-p)$$

$$= G_p(q-p) + o(\|q-p\|)$$

Ou seja, f é diferenciável em p e $D_p f = G_p$.

O caso $r > 1$ segue por indução. $\square$

Revisão:

① Operadores lineares entre espaços de dimensão finita são contínuos.
Operadores lineares " podem ser ~~representadas~~ por matrizes. Em particular:

$$\dim\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)\right) = m \cdot n$$

② Operadores lineares entre espaços normados são contínuos

$$\iff \|T\| := \sup_{v \neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} < \infty .$$

③ $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto é diferenciável se

$\exists\, Df$: $f(p+h) - f(p) = D_p f(h) + o(\|h\|)$

④ dif $\Rightarrow$ parc. dif.

⑤ D é linear, regras de cadeia e de Leibniz.

⑥ Teo: f cont. dif em $\mathcal{U}$ $\iff$ f cont. parc. dif.

⑦ $D_p^k(f)$ é uma aplicação k-linear:

$$D_p^k(f) : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \dots \mathbb{R}^m}_{k\text{-vezes}} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

é linear em cada componente. De fato:

$$D_p^k(f)\left(x^{(1)}, \dots, x^{(k)}\right)$$

$$= \left(\sum_{\substack{i_1 \dots i_k \\ \in \{1, \dots, m\}}} \frac{\partial^k f_j}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_k}^{(k)} \right)_{j = 1, \dots, n}$$

⑧ C^r é um espaço de Banach.

⑨ Se $D_p^2 f$ existe, então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ (Clairault)

Teorema da função implícita e da função inversa

Motivação (Função inversa)

Dada $f: U \to V$ bijetora. É natural perguntar se uma propriedade de f passa para f^{-1}.

Exemplos:

(a) Se $f: U \to V$ é contínua, bijetora e U é compacto, então f^{-1} é contínua.

(b) Se $f: I \to J$, I, J intervalos abertos em $\mathbb{R}$ é bijetora e contínua, então f^{-1} é contínua.

Prova: f monótona $\Rightarrow$ ...

(c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear, bijetora $\Rightarrow$ f^{-1} linear.

(d) $f: (-1,1) \to (-1,1)$ dif., bijetora. $(x \mapsto x^3)$.

f^{-1} não é necessariamente diferenciável!

Motivação (Função implícita)

Definição: Seja $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ aberto e $f: U \to \mathbb{R}^n$.

Para $(x_0, y_0) \in U$ e $z_0 = f(x_0, y_0)$, dizemos que φ é uma função implícita (local) se existe $\varepsilon > 0$:

(i) $\forall x \in B_\varepsilon(x_0)$: $f(x, \varphi(x)) = z_0$.

(ii) $\varphi(x_0) = y_0$

Exemplo. $f(x_1, x_2, y) = x_1^2 + x_2^2 + y^2$.

$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (1, 0)$, $y^{(0)} = 1$, $f(1, 0, 1) = 2$.

$\Rightarrow y^2 = 2 - \|x\|^2 \Rightarrow y = \sqrt{2 - \|x\|^2}$,

ou $y = -\sqrt{2 - \|x\|^2}$

Porém, para $\|x\|^2 < 2$, $\varphi(x) = \sqrt{2 - \|x\|^2}$ é <u>função implícita</u> para o problema.

<u>Aplicações.</u>

① Geometria diferencial

② Comportamento local de soluções de equações da forma $f(x,y) = z$.

<u>A relação entre a função implícita e a função inversa:</u>

① Seja $f : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos.

Define $F(x,y) := f(y) - x$.

Queremos achar $y = g(x)$ tal que $F(x, g(x)) = f(g(x)) - x = 0$

Neste caso: $f \circ g = id$.

② Seja $F : U \to V$, $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$, $V \subset \mathbb{R}^n$,
$(x_0; y_0)$: $F(x_0, y_0) = 0$
Define
$$f(x,y) := (x, F(x,y)),$$
suponha que f é invertível e mostre que f^{-1} contém uma solução para a função implícita.

Escreve $f^{-1} = (h, g)$. Então, por def.,

$$(h, F(h,g)) = (h(x,y), F(h(x,y), g(x,y)))$$
$$= f \circ f^{-1}(x,y) = (x,y).$$

$\Rightarrow \begin{cases} h(x,y) = x, \text{ e } (x, F(x, g(x,y))) = (x,y) \\ \text{Como } f(x_0, y_0) = (x_0, 0), \quad g(x_0, 0) = y_0. \end{cases}$

$\Rightarrow$ $\varphi(x) := g(x,0)$ é a função implícita.