1ª Prova - Análise Real/Cálculo Avançado I

15 de maio de 2025
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Questão 1. (3p + 1p) Seja (X,d) um espaço métrico completo, $T : X \to X$ e $C_n : \mathbb{N} \to (0,\infty)$ com $\sum_n C_n < \infty$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in X$,

$$d(T^n(x), T^n(y)) \le C_n d(x,y).$$

a) Mostre que existe $x \in X$ tal que $T(x) = x$.
b) Mostre que, se $T(x) = x$ e $T(y) = y$, então $x = y$.

Solução 1. a) Para $x \in X$, define $x_n := T^n(x)$. Então, para $k > 0$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+k}) &\le C_n d(x, x_k) \\ &\le C_n \sum_{\ell=0}^{k-1} d(T^\ell x, T^{\ell+1} x) \\ &\le C_n \sum_k C_k. \end{aligned}$$

Ou seja, (x_n) é Cauchy. Como X é completo, $\lim_n x_n$ existe. Além disso, como T é Lipschitz com coeficiente C_1, $T(\lim_n x_n) = \lim_n T(x_n)$.

b) $d(x,y) = d(T^n(x), T^n(y)) \le C_n d(x,y) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Questão 2 (2 p). Seja (X,d) um espaço métrico compacto e $C(X,\mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas com valores em $\mathbb{R}$. Seja $\mathscr{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ tal que, para qualquer $x \in X$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall y \in X \text{ com } d(x,y) < \delta_x \text{ e } f \in \mathscr{F}.$$

Mostre que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in X \text{ com } d(x,y) < \delta \text{ e } f \in \mathscr{F}.$$

Solução 2. Seja $\epsilon > 0$ dado e δ_x como no enunciado, mas em relação com $\epsilon/2$. Daí, $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$ é uma cobertura por abertos. Como (X,d) é um espaço métrico compacto, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x, y \in X$ com $d(x,y) < \delta$, existe $z \in X$ tal que $x, y \in B_{\delta_z}(z)$. Daí,

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Questão 3 (2p + 1p). Seja (X,d) um espaço métrico compacto e $T : X \to \mathbb{R}$ uma função. Suponha que, para qualquer $x \in X$, existe $C_x > 0$ tal que $|T(x) - T(y)| \le C_x d(x,y)$ para qualquer $y \in X$.

a) Mostre que existe uma tal função T tal que

$$\sup\left\{\tfrac{|T(x)-T(y)|}{d(x,y)} : x,y \in X, x \neq y\right\} = \infty.$$

b) Explique, por que a prova anterior não funciona:

Solução 3. a) Seja $X = \{(x,y) : x \in [0,1], 0 \le y \le x^2\}$, d a métrica $d((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})) := |x-\tilde{x}|+|y-\tilde{y}|$ e $T(x,y) := y/x$ para $x \neq 0$ e $T(0,0) = 0$. Então,

$$\begin{aligned}\left|\frac{y}{x}-\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right| \le \left|\frac{y}{x}-\frac{\tilde{y}}{x}\right| + \left|\frac{\tilde{y}}{x}-\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}\right| \\ \le \frac{1}{x}|y-\tilde{y}| + \frac{\tilde{y}}{x\tilde{x}}|x-\tilde{x}| \\ \le \frac{1}{x}|y-\tilde{y}| + \frac{\tilde{x}}{x}|x-\tilde{x}| \\ \le \frac{1}{x} d((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})).\end{aligned}$$

$$\left|\frac{y}{x} - T(0,0)\right| = \left|\frac{y}{x}\right| \le \frac{x^2}{x} = x \le d((x,y),(0,0)).$$

No entanto

$$\frac{\left|T(x,x^2)-T(x,0)\right|}{d((x,x^2),(x,0))} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 0} \infty$$

Um exemplo unidimensional: $f : x \to x^2 \sin(x^{-2})$, que é uma função diferenciável:

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(t)-f(0)}{t-0}\right| = \lim_{t\to 0}\left|\frac{t^2 \sin t^{-2}}{t}\right| = \lim_{t\to 0}|t\sin t^{-2}| = 0,$$

$$f'(x) = 2x\sin x^{-2} - \frac{2x^2}{x^3}\cos x^{-2} \xrightarrow{x\to 0} \infty.$$

b) Explique, por que a prova anterior não funciona: suponha que, para cada $x \in X$, existe $\epsilon_x > 0$ tal que $|T(x) - T(y)| \le C_x d(x,y)$ para qualquer $y \in B_{\epsilon_x}(x)$. Daí, como no anterior, existe um $\delta > 0$ tal que, para cada y,z com $d(y,z) < \delta$, existe x: $y,z \in B_{\epsilon_x}(x)$. Daí, $d(Tz,Ty) \le d(Tz,Tx)+d(Tx,Ty) \le 2C_x\epsilon_x$. Ou seja, para controlar os coeficientes de Lipschitz, precisa-se de controlar $C_x\epsilon_x/d(y,z)$.

Questão 4 (3p + 2p). Seja $d \ge 1$, $X := [0,2\pi]^d$ e, para $n \in \mathbb{Z}^d$,

$$\varphi_n : X \to \mathbb{C}, x \mapsto e^{i\langle x,n\rangle}.$$

Seja $\mathscr{A} \subset C(X,\mathbb{C})$ a algebra gerada por $\{\varphi_n : n \in \mathbb{Z}^d\}$.

a) Mostre que $\{\Re(f)+\Im(g) : f,g \in \mathscr{A}\}$ é denso em $C([0,2\pi-\epsilon]^d,\mathbb{R})$, para qualquer $\epsilon > 0$, usando o teorema de Stone-Weierstrass na versão real.

b) Mostre que $\{\Re(f)+\Im(g): f,g \in \mathscr{A}\}$ é denso em $C(Y,\mathbb{R})$, para $Y := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Teorema de Stone-Weierstrass. *Suponha que X seja um espaço compacto de Hausdorff e $\mathscr{A}$ seja uma subálgebra de $C(X,\mathbb{R})$ que contém uma função constante diferente de zero e que separa pontos. Então $\mathscr{A}$ é denso em $C(X,\mathbb{R})$.*

Solução 4. Note que

$$\Re(\varphi_n\varphi_m) = \Re(\varphi_n)\Re(\varphi_m) - \Im(\varphi_n)\Im(\varphi_m), \quad \Im(\varphi_n\varphi_m) = \Re(\varphi_n)\Im(\varphi_m) - \Im(\varphi_n)\Re(\varphi_m).$$

Ou seja, a algebra gerada por $\{\Re(\varphi_n)\}$ e $\{\Im(\varphi_n)\}$ é

$$\mathscr{B} := \{\Re(f)+\Im(g): f,g \in \mathscr{A}\}.$$

a) Basta mostrar que $\mathscr{B}$ contém uma função constante e separa pontos em $[0,2\pi-\epsilon]^d$: Como $\varphi_0 = 1$, basta mostrar a separação. Sejam $x = (x_1,\dots x_d), y = (y_1,\dots y_d) \in \mathbb{R}^d$ tal que $x_j \neq y_j$ para um $j = 1,\dots d$. Então,

$$\varphi_{e_j}(x)/\varphi_{e_j}(y) = e^{i\langle e_j, x-y\rangle} = e^{i(x_j-y_j)}.$$

Mas este quotiente é 1 se e somente se $x_j - y_j \in 2\pi\mathbb{Z}$. Ou seja, $\Re\varphi_{e_j}(x) = \Re\varphi_{e_j}(y)$ e $\Im\varphi_{e_j}(x) = \Im\varphi_{e_j}(y)$ se e somente se $x_j - y_j \in 2\pi\mathbb{Z}$. Então, a algebra separa pontos em $[0,2\pi-\epsilon]^d$.

b) Qualquer funçao definido em $\mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ pode ser representada como $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, com $f(x+n) = f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^d$ e $n \in \mathbb{Z}^d$. Daí,

$$C(Y,\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) : f(x+n) = f(x) \forall x, n \in \mathbb{Z}^d\}.$$

Em particular, os φ_n são definidas em Y. Além disso, pelo anterior, $\mathscr{A}$ separa pontos em Y e contém a função 1. Daí, a afirmação é uma consequência do Teorema de Stone-Weierstrass.