Manuel Stadlbauer

Questão 1.5. Sejam (X,d) e $(Y,\overline{d})$ espaços métricos, $f: X \to Y$ contínua e (X,d) compacto. Mostre que f é uniformemente contínua, usando os números de Lebesgue.

Questão 1.6. Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$. Mostre que existe um mínimo global.

1.2 Espaços de funções

Questão 1.7. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $C_b(A,\mathbb{R}) := \{f: A \to \mathbb{R} \mid f \text{ contínua}, \|f\|_\infty < \infty\}$. Uma função $f: A \to \mathbb{R}$ chama-se Lipschitz contínua se existe L_f tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f \|x - y\| \quad \forall x, y \in A.$$

a) Seja A compacto. Mostre que as funções Lipschitz contínuas são densas em $C_b(A,\mathbb{R})$ em relação com a topologia induzida por $\|\cdot\|_\infty$.
b) Mostre que as funções Lipschitz contínuas e limitadas não são densas em $C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$, mas densas em

$$\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ uniformemente contínua}, \|f\|_\infty < \infty\}.$$

Questão 1.8. Mostre que os polinômios em n variáveis não são densos em $C_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Questão 1.9. Mostre que $\{f \in C^1 : \|f\|_\infty < \infty\}$ é denso em $C_b(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Questão 1.10. Suponha que $f \in C([a,b])$ e que $\int_a^b x^n f(x)dx = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $f = 0$.

Questão 1.11. Seja $C([a,b]) := \{f: [a,b] \to \mathbb{R} \text{ cont.}\}$ e

$$d_1(f,g) := \int_a^b |f(x) - g(x)|dx, \quad d_\infty(f,g) := \max\{|f(x) - g(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Mostre que $\mathrm{id}: (C([a,b]), d_\infty) \to (C([a,b]), d_1)$ é contínua, mas que $\mathrm{id}: (C([a,b]), d_1) \to (C([a,b]), d_\infty)$ não é. Decide se os espaços são completos.

Questão 1.12. Seja X um espaço localmente compacto e

$$C_c(X) := \{f \in C(X) : \exists K \subset X \text{ compacto tal que } f(x) = 0 \forall x \notin K\}$$
$$C_0(X) := \{f \in C(X) : \forall \epsilon > 0 \exists K \subset X \text{ compacto tal que } |f(x)| < \epsilon \forall x \notin K\}$$

Mostre que o fecho em $C_c(X)$ em relação com a norma $\|\cdot\|_\infty$ é $C_0(X)$.

1.3 Topologia

Questão 1.13. Seja $f: X \to \mathbb{R}$. O grafo de f é o conjunto $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times \mathbb{R}$.

a) Mostre que o grafo é fechado se f é contínua.
b) Mostre que o grafo é compacto se f é contínua e X é compacto.
c) Mostre que f é contínuo se o grafo é compacto.
d) Mostre que f não é necessariamente contínua se o grafo é fechado.

Questão 1.14. Sejam S_λ, $\lambda \in \Lambda$ espaços conexos tal que $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$. Mostre que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda \neq \emptyset$ é conexo.

Questão 1.15. Seja S conexo. Decide se o interior de S é conexo.

Questão 1.16. Seja (X,d) compacto e $f: X \to X$ um mapa tal que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $d(f(x), f(y)) < \lambda d(x,y)$ para qualquer $x, y \in X$. Mostre que existe um único ponto x_0 tal que $f(x_0) = x_0$.

Questão 1.17. Seja $\lambda \in (0,1)$. Construa $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $d(f(x), f(y)) < \lambda d(x,y)$ para qualquer $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(x) \neq x$ para qualquer $x \in X$.