

Analise Real / Cálculo Avançado I

- Parte 1 -

Capítulo I - Topologia

Espacos métricos

Def. (X, d) espaço métrico se $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$:

- (i) $d(x, y) = d(y, x)$
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- (iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$$B_\varepsilon(x) := \{ y : d(x, y) < \varepsilon \}$$

Bola aberta de raio ε
e centro x .

Exemplos

① Métrica discreta.

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & : x = y \\ 1 & : x \neq y \end{cases}$$

$$B_\varepsilon(x) = \begin{cases} \{x\} & : \varepsilon \leq 1 \\ X & : \varepsilon > 1 \end{cases}$$

② $\mathbb{R}^n$ com $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$

③ $C([0, 1])$ com $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

④ $X = A^{\mathbb{N}}$, $A \subset \mathbb{N}$,

$$d((x_i), (y_i)) := \min_{i \geq 0} 2^{-i} \mathbf{1}_{\{x_i \neq y_i\}}$$

Def. métrica induzida e métrica definida ~~por~~
por carimbos.

Squências

Def. (x_n) é convergente se $\exists x \in X$ t.q., $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$:
$$d(x_n, x) < \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

x chama-se limite de (x_n)

Prop. Se (x_n) é convergente, então o limite é único determinado.

Para. Sup. x, y limites. Escolhe $\varepsilon > 0$. Daí, existe

x_n tal que $d(x, x_n) < \varepsilon, d(y, x_n) < \varepsilon$

$$\stackrel{\Delta}{\Rightarrow} d(x, y) < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y \quad \square$$

Def. (x_n) é CAUCHY se, $\forall \varepsilon > 0 \exists N$,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > N.$$

Fato - ① Convergente $\Rightarrow$ Cauchy

② $\exists$ seq. de Cauchy que não é convergente.

Def. Se (X, d) é um espaço métrico t.q. qualquer sequência de Cauchy é convergente, então (X, d) é completo.

Subsequência: Dado $n_k \nearrow \infty$, seq. em $\mathbb{N}$, então

(x_{n_k}) é subsequência de (x_n) .

Fato, (x_n) convergente $\Rightarrow (x_{n_k})$ convergente
 (x_n) Cauchy $\Rightarrow (x_{n_k})$ Cauchy.

Continuidade

Def. ① $f: (X, d) \rightarrow (Y, \bar{d})$ é contínua em $x \in X$

se, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$\bar{d}(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall y \in B_\delta(x).$$

② f é cont. se é cont. $\forall x \in X$.

Teorema f contínua $\Leftrightarrow$ para qualquer (x_n) convergente, $(f(x_n))$ é convergente.

Prova. " $\Rightarrow$ " Ex.

Suponha que x não é ~~convergente~~ ^{contínua} e $x \in X$. Daí,

existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0 \exists y_\delta \in B_\delta(x)$

tal que $\bar{d}(f(x), f(y_\delta)) > \varepsilon$.

Daí, (y_n) é sequência convergente com $\lim y_n = x$ e $\bar{d}(f(x_n), f(x)) > \varepsilon \quad \forall n$. Ou seja, $(f(y_n))$ não é convergente. $\square$

Exemplos.

① $\text{id} : (\mathbb{R}^n, d_{\text{discr.}}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl.}})$ é contínua

② $\text{id} : (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl.}}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\text{discr.}})$ não é cont.

③ Seja A matriz de $\mathbb{C}$ $n \times n$. Daí, para $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|Av - Aw\| &= \|A(v-w)\| \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \cdot \|v-w\| \end{aligned}$$

Definido $d(v, w) := \|v - w\|_2$, e sendo o fato

que $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} < \infty$, obtém-se

que $d(Au, Av) \leq \|A\| d(u, v)$.

Def. Dado uma norma num espaço vetorial,

$d(u, v) := \|u - v\|$ chama-se "métrica induzida da norma $\|\cdot\|$ ".

Exatão ① Defne uma norma e mostre que d é métrica.

② Mostre que $\|A\| < \infty$.

Def. Seja (X, d) , $(Y, \bar{d})$ ~~esp.~~ esp. met. e

$f: X \rightarrow Y$ tal que $\exists L \geq 0, \alpha > 0$

$$\bar{d}(f(x), f(y)) \leq L d(x, y)^\alpha$$

Neste caso, f chama-se Hölder contínua de expoente α .

Se $\alpha = 1$, f " Lipschitz.

L chama-se (uma) constante de Hölder / Lipschitz.

Exemplos ① A linear $\Rightarrow A$ Lipschitz.

② $X = (0, 1)$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável

tal que $L := \|f'\|_\infty < \infty$. Pelo TVM,

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

$\Rightarrow f$ é Lipschitz.

③ $f: x \mapsto \frac{1}{x}$. não é ^{Hölder} Lipschitz pois, para $x_n = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_{n+1})| &= |n - n+1| = 1 \\ |x_n - x_{n+1}| &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{|f(x_n) - f(x_{n+1})|}{|x_n - x_{n+1}|^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

④ $X = [0, 1]$, $f(x) = \sqrt{x}$ é Hölder.

Def: $f: (X, d) \rightarrow (Y, \bar{d})$ é HOMEOMORFISMO se f é bijetor, cont. e f^{-1} é cont.

Ex: • $A \in GL_n(\mathbb{R})$ é homeom.

• Ex. 4 é homeom.

• $\text{id}: (\mathbb{R}^n, d_{\text{dis}}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl.}})$ não é.

Conjuntos abertos e fechados

Def: ① Seja (X, d) métrico, $S \subset X$. Dizemos que $x \in X$ é ponto lim. de S se $\exists (x_n) \text{ em } S: \lim x_n = x$.

② S é fechado se S contém todos os seus pontos limites.

③ A é aberto se $X \setminus A$ é fechado.

Teorema: A aberto $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subset A$.

Prova -

(i) Seja A aberto e $x \in A$.

Suponha que $B_n(x) \cap A^c \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Daí,
existe (x_n) em A^c tal que $x_n \rightarrow x$.

$\Rightarrow x$ é ponto limite de $A^c \Rightarrow x \in A^c$, absurdo.

(ii) Suponha que, para qualquer $x \in A \exists \delta_x: B_{\delta_x}(x) \subset A$.

Se A^c não é fechado, então existe $x \in A$ e $(x_n) \subset A^c$

tal que $x_n \rightarrow x$. Daí, para n grande,

$x_n \in B_{\delta_x}(x) \subset A$, que é absurdo. $\square$

Observação

① $X, \emptyset$ são abertos e fechados.

② Qualquer combinação é possível:

- Existe conjuntos que são
nem abertos, nem fechados: $(-1, 1]$ em $\mathbb{R}$

- Conjuntos que são abertos e fechados ("clopen").

$$X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \quad [a] = \{(x_i)_{i \geq 0} : x_0 = a\}$$

Ex: Mostre que $[a]$ é clopen.

Teorema (Qualquer espaço métrico é espaço top)

Para $J := \{A : A \text{ aberto}\}$,

(i) $\emptyset, X \in J$

(ii) $\bigcup_{A \in I} A \in J$ se $I \subset J$
("qualquer união de abertos é aberto")

(iii) Se $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in J$, então

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \in J$$

Prova: Ex.

Obs: (X, J) é esp. top. e (i) - (iii) val

Seja $\bar{A} := \{x \in X : x \text{ é ponto limite de } A\}$.

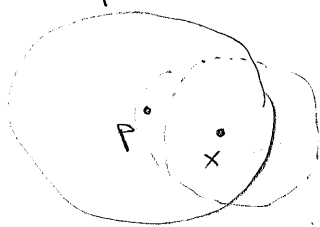
Teorema: $\bar{A}$ é fechado. Além disso,

$$\bar{A} = \bigcap_{B \supset A, B \text{ fechado}} B$$

Prova:

Passo 1: Note que x ponto limite de A
 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$.

Passo 2: Seja p ponto limite de $\bar{A}$. Dai,
para qualquer $\varepsilon > 0, \exists$ um ponto limite x de A
com $x \in B_\varepsilon(p)$.



Dai, $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

Logo $B_{2\varepsilon}(p) \supset B_\varepsilon(x)$ pela Δ

$$\Rightarrow B_{2\varepsilon}(p) \cap A \neq \emptyset$$

□

Passo 3: Exercício

□

O caso $\mathbb{R}$

Teorema $A \subset \mathbb{R}$ aberto $\Leftrightarrow \exists$ intervalos abertos I_j ,
 $j \in K$, K enumerável ou finito tal que
• $A = \bigcup I_j$
• $I_j \cap I_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$

Prova (Esboço):

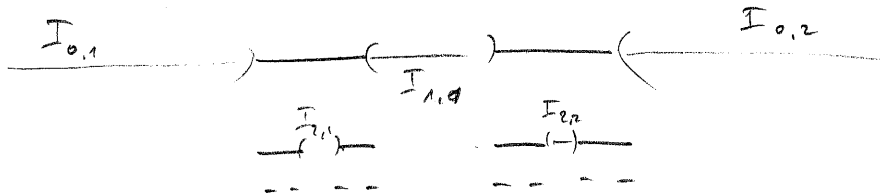
~~Q.E.D.~~

① Construa intervalos "maximais" dentro de A

$$\Rightarrow A = \cup \text{ intervalos max.}$$

② Usa o fato que qualquer int. max. contém um racional de $\mathbb{Q}$. $\square$

Exemplo: $\mathbb{Q}$ completo do conjunto de racionais:



Teorema: Seja $f: (X, d) \rightarrow (Y, \bar{d})$.

Então, f é contínua (Def. ϵ, δ)

$$\Leftrightarrow \forall U \text{ aberto, } f^{-1}(U) \text{ é aberto.}$$

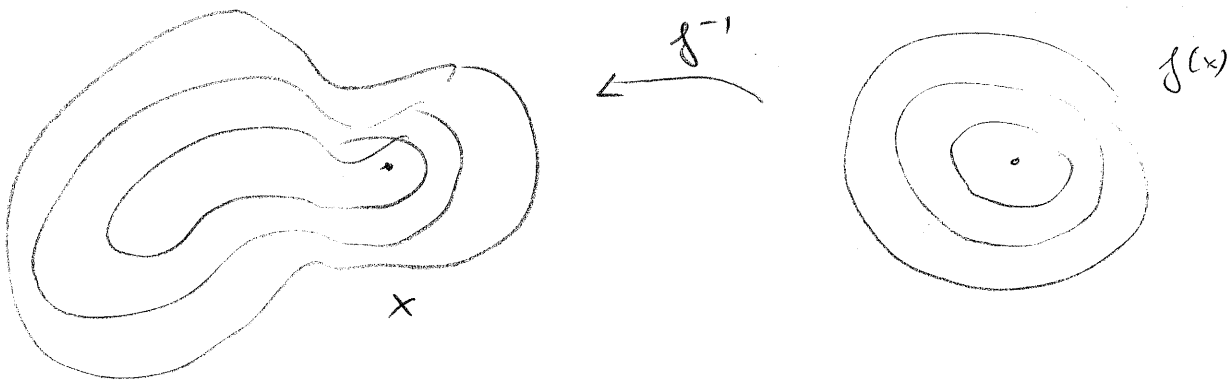
Prova (gráfica):

ϵ - δ significa que: $\bar{d}(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \forall y: d(x, y) < \delta$

$$\Rightarrow f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$$

$$\Rightarrow f^{-1}(B_\epsilon(f(x))) \supset B_\delta(x)$$

U aberto $\Rightarrow f^{-1}(U)$ aberto significa



$\square$

Continuação da teoria da topologia

① A topologia induzida

Seja (X, J) espaço topológico e $A \subset X$. Então,

$$J_A := \{ B \cap A : B \in J \}$$

é a topologia induzida.

Exemplos : $A = [0, 1]$, $X = \mathbb{R}$.

$\Rightarrow A \in J_A$ pois $A \cap \mathbb{R} = A$.

$(\frac{1}{2}, 1] \in J_A$ pois $(\frac{1}{2}, 1] = [0, 1] \cap (\frac{1}{2}, \infty)$.

Outra : Há conjuntos abertos em J_A e não abertos em J .

$J_A \not\subset J$ necessariamente.

Para mostrar : J_A é topologia !!

② A topologia produto

Seja (X_i, d_i) espaços métricos para $i=1, \dots, n$. Então

$(\prod X_i, d)$, com $d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum d_i(x_i, y_i)$
é ^{obviamente} um espaço métrico. A topologia induzida chama-se topologia produto.

Subteorema : ① A topologia produto J é definida como a topologia mínima tal que, para qualquer $A_1, \dots, A_n$ com $A_i \in J_i$, $\prod_{i=1}^n A_i \in J$.

Porém, existem várias possibilidades de definir a métrica

d . Mas se $n < \infty$, a top. sempre é a mesma.

② $x_n \rightarrow x$ em um espaço top. $\Leftrightarrow \forall U$ aberto, $x \in U \exists N: x_n \in U \forall n > N$.

Teorema Sejam (X, d_i) espaços métricos, $i=1, \dots, k$. Então,
 $\lim x_n = x$, para $x_n, x \in \bigcap_{i=1}^k X_i$ se e somente se
 $\lim \pi_i(x_n) = x \quad \forall i=1, \dots, k$.

Aqui: $\pi_i(x_1, \dots, x_n) := x_i$.

Prova. ① Suponha que $d(x_n, x) \rightarrow 0$. Pela def. de d , $d_i(\pi_i(x_n), \pi_i(x)) \rightarrow 0$.

② Suponha que $d_i(\pi_i(x_n), \pi_i(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Daí,
 para $\varepsilon > 0 \exists N_i : d_i(\pi_i(x_n), \pi_i(x)) < \varepsilon \quad \forall n > N_i$.

$$\Rightarrow d_i(\pi_i(x_n), \pi_i(x)) < \varepsilon \quad \forall n > \max\{N_1, \dots, N_k\}.$$

$$\Rightarrow d(x_n, x) \leq k \max_i d_i(\pi_i(x_n), \pi_i(x)) < k \cdot \varepsilon. \quad \square$$

Interesse nesta prova. No caso de produtos infinitos,
 a prova não funciona. De fato, somente vale

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow \pi_i(x_n) \rightarrow \pi_i(x).$$

Compacidade sequencial

Def. Um conjunto K é seq. compacto se,
 para qualquer sequência (x_n) , existe uma
 subsequência ~~infinita~~ (x_{n_k}) , $n_k \nearrow \infty$ e $x \in K$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x.$$

Teorema. Se (X, d) métrico, e $K \subset X$.
 K compacto $\Rightarrow K$ fechado e ~~$\neq \emptyset$~~

~~$$\sup \{d(x, y) : x, y \in K\} < \infty$$~~

$$\exists p \in X \text{ e } M > 0 : d(x, p) < M \quad \forall x \in K.$$

Def. $A \subset X$ é limitado se $\exists p \in X$ e $M > 0$:

$$d(x, p) < M \quad \forall x \in A.$$

Prova.

① Vamos mostrar que compacto $\Rightarrow$ limitado:

Suponha que A não é limitado. Então, existe (x_n) em A tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, p) = \infty$. Pela propriedade, existe $x_0 \in A$ e

$n_k \nearrow \infty$: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$, pela continuidade de

$x \mapsto d(x, p)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} d(x_{n_k}, p) = d(x_0, p) < \infty$, que é absurdo.

② Exercício.

Teorema. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ é compacto (em relação ao topo. padrão).

Prova. Seja (x_n) seq. em $[a, b]$ e

$$C := \left\{ x \in [a, b] : x_n < x \text{ para um número finito de } n \right\}$$

Obs.: $a \in C \Rightarrow C \neq \emptyset$.

Defina $p := \inf \{ x \in C \}$. Por construção, $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists$ um número infinito de n tal que $x_n \in (-\varepsilon + p, p + \varepsilon)$.

Escolha x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in (-\frac{1}{k} + p, p + \frac{1}{k})$. $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = p$. $\square$

Com este teorema, é fácil provar o Bolzano - Weierstrass e Heine - Borel.

Fato 1: Seja (X_i, d_i) espaços métricos e $K_i \subset X_i$ seq. compactos.

Então $K_1 \times \dots \times K_n$ é seq. compacto.

Fato 2: Seja K seq. compacto e $A \subset K$ fechado

$\Rightarrow A$ seq. compacto.

Fato 3: Qualquer sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ tem

uma subseq. convergente: Se (x_k) é limitada, então $\exists M > 0$,

$$x_k \in [-M, M]^n \quad \forall k=0,1,\dots$$

[Bolzano - Weierstrass]

Fato 4: $K \subset \mathbb{R}^n$ seq. compacto $\Leftrightarrow K$ fechado e limitado

[Heine - Borel].

É uma ferramenta útil:

Teorema. Seja (K_n) uma sequência de conjuntos seq. compactos tal que $K_n \supset K_{n+1}$ e $K_n \neq \emptyset \quad \forall n$.

Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é compacto e não-vazio.

Prova. Seja (x_n) uma seq. tal que $x_n \in K_n$. Então, existe (x_{n_k}) convergente (pela compactidade de K_1).

Mas os K_i são fechados $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x \in K_i \quad \forall i$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i.$$

□

Aplicações contínuas

Def. $f: (X, d) \rightarrow (Y, \bar{d})$ contínua.

Teo. Se $K \subset X$ é seq. compacto, então $f(K)$ é seq. compacto.

Teo. Se $(Y, \bar{d}) = (\mathbb{R}, \text{Métrica padrão})$ e $K \subset X$ é seq. compacto, então existem $x_{\min}, x_{\max}$ tal que

$$\inf \{ f(x) : x \in K \} = f(x_{\min})$$
$$\sup \quad \quad \quad = f(x_{\max})$$

Prva. ① $f(K)$ é seq. compacta $\Rightarrow$ limitada.

Escolhe (y_n) e $f(K) : y_n \rightarrow \sup \{ y : y \in f(K) \}$

Escolhe (x_n) tal que $f(x_n) = y_n$.

K seq. comp $\exists n_k \nearrow \infty$ e $x \in K$ tal que $\lim x_{n_k} = x$.

Pela cont. de f : $f(x) = \sup \{ y : y \in f(K) \}$ $\square$

Prva ②: Def. $M := \sup \{ f(x) : x \in K \}$, e

$$K_\epsilon := \{ x \in K : |f(x) - M| \leq \frac{1}{\epsilon} \}$$

$$= f^{-1} \left(\left[-\frac{1}{\epsilon} + M, M + \frac{1}{\epsilon} \right] \right) \neq \emptyset.$$

Basta provar a "ferramenta útil"

$\square$

Aplicações de compactidade

- ① Suponha que $f: X \rightarrow Y$ é contínua, injetor, X compacto.
Então, $f': f(X) \rightarrow Y$ é contínua.

Prova: Basta mostrar que $f(A)$ é aberto, para qualquer

$A \subset X$ aberto: Então, $X \setminus A$ é fechado

$$\Rightarrow X \setminus A \text{ compacto} \Rightarrow f(X \setminus A) \text{ compacto}$$
$$= f(X) \setminus f(A)$$

$$\Rightarrow \text{f(A) aberto.} \quad \square$$

- ② Def Uma função é unif. contínua se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:
 $d(f(x), f(y)) < \varepsilon \quad \forall x, y: d(x, y) < \delta$.

Prop. Suponha que $f: X \rightarrow Y$ é cont. e X é compacto.

Então, f é unif. contínua.

Prova: Suponha que não. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para

cada $\delta > 0$, existem x, y : $d(x, y) < \delta$ e $d(f(x), f(y)) > \varepsilon$.

Escolha $(x_n), (y_n)$ tal que $d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$ e $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$

$$\xrightarrow{\text{cpt}} \exists (n_k): x_{n_k} \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad y_{n_k} \rightarrow x$$

$$\Rightarrow \liminf_{k \rightarrow \infty} d(x, y_{n_k}) > \varepsilon \quad \text{que é absurdo} \quad \square$$

Compacidade

Uma cobertura $\mathcal{U}$ de $A \subset X$ é um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ tal que $\bigcup_{V \in \mathcal{U}} V \supset A$. Uma subcobertura $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{U}$ é um subconjunto de $\mathcal{U}$ tal que $\bigcup_{V \in \tilde{\mathcal{U}}} V \supset A$.

Def. $A \subset X$ é compacto se ^{por} qualquer cobertura aberta de A contém uma subcobertura finita.

Exemplo Seja A compacto, ~~Então~~ $A \subset X$, (X, d) métrico. Então diam $A = \sup \{ d(x, y) : x, y \in A \} < \infty$.

Prova: $\mathcal{U} := \{ B_\varepsilon(x) : x \in A \}$.

$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$ tal que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$$

$\Rightarrow \text{diam}(A) < \max \{ d(x_i, x_j) : 1 \leq i, j \leq n \} + 2\varepsilon$.

Teorema: Seja (X, d) métrico. Então

A compacto $\Leftrightarrow A$ seq. compacto.

Prove. Suponha que A é compacto.

Para uma sequência (x_n) em A , temos que construir uma subseq. convergente. Usando a prova anterior,

para qualquer $\varepsilon > 0 \exists z_1, \dots, z_{n(\varepsilon)}, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.q.

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n(\varepsilon)} B_\varepsilon(z_i)$$

Daí, pelo princípio dos p-pas, existe $z(\varepsilon)$ tal que $B_\varepsilon(z(\varepsilon))$ contém um número infinito de elementos de (x_n) .

Usaremos esta observação para construir um limite:

Escolha $z_1 = z(1)$. Suponha que $z_1, \dots, z_n$ foram construídos tal que

- $B_{2^{-k}}(z_k)$ contém um número infinito de (x_n)
- $d(z_k, z_{k+1}) < 2^{-k} + 2^{-k-1}$, para $k = 1, \dots, n-1$.

De compactidade, existe $y_1, \dots, y_m$ tal que $\bigcup_{i=1}^m B_{2^{-n-1}}(y_i) \supset A$. De novo, pelo princípio dos p-pas, existe $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq m$ t.q.

$$(1) \quad d(z_n, y_{i_j}) < 2^{-n} + 2^{-n-1}$$

$$(2) \quad \bigcup_{j=1}^m B_{2^{-n-1}}(y_{i_j}) \supset B_{2^{-n}}(z_n)$$

$$\Rightarrow \exists z_{n+1} \text{ com } (*)$$

$$(A) \quad (z_n) \text{ é Cauchy: } d(z_n, z_{n+k}) < \sum_{i=n}^{\infty} (2^{-n+i} + 2^{-n-i-1}) < C \cdot 2^{-n}$$

$$(B) \quad (z_n) \text{ é convergente: Ex.}$$

Prova alternativa:

Supe que A não é seq. compacto. Então,
existe (x_n) seq. subseq. convergindo.

Dai, para qualquer $x \in A$ $\exists \varepsilon > 0$ t.q.

$B_{\varepsilon/2}(x)$ somente contém um número finito de (x_n)

$\xRightarrow{\text{por}} \exists$ uma subseq. finita de
 $\{ B_{\varepsilon/2}(x) : x \in A \}$.

□

Absurdo.

Agora provamos que seq. compacto $\Rightarrow$ compacto;
usando "números de Lebesgue":

Def: O número de Lebesgue λ de uma cobertura $\mathcal{U}$ é
satisfaz: $\forall a \in A \quad \exists V \in \mathcal{U}$ t.q. $B_\lambda(a) \subset V$.

Lema: Seja A seq. compacto e $\mathcal{U}$ uma
cobertura por abertos de A . Então $\exists$ número de
Lebesgue $\lambda > 0$.

Prva. Por contradicção - Suponha que não. Daí,
 Para ^{n seq. grade} $\mathcal{U}$, existe a_n tal que $B_{1/n}(a_n)$ não
 está contido em nenhum elemento de $\mathcal{U}$.

$\Rightarrow$ seq. crit

$\exists$ subseq convergente (a_{n_k}) com limite a .

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, U \in \mathcal{U} : B_\varepsilon(a) \subset U$.

$\Rightarrow$ Para k suf. grande $B_{1/n_k}(a_{n_k}) \subset B_\varepsilon(a) \subset U$
 (contradição).

Para do teorema:

Seja A compacto, e $\lambda > 0$ um número de Lebesgue.

Agora, escolha $a_1 \in A, U_1 \in \mathcal{U}$ com $B_\lambda(a_1) \subset U_1$.

Depois, por indução, escolha $a_n \in A$ e U_n

$$a_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$$

$$U_n \supset B_\lambda(a_n)$$

Se este processo não acaba, então existe uma
 subseq. convergente de (a_n) , que é absurdo.

Def: Um espaço métrico X é totalmente limitado

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} \text{ e } x_1, \dots, x_n :$

$$X \subset \bigcup B_\varepsilon(x_i)$$

Teorema: Seja X métrico e $A \subset X$ compacto.

Então, $A \subset X$ é compacto

$\Leftrightarrow A$ é fechado e ~~completo~~ totalmente limitado.

Prova: Ver V_n da prova compacto $\Rightarrow$ seq. compacto.

Conjuntos conexos

Motivação: TVI

- Def. (1) $A \subset (X, \mathbb{R})$ é conexo se, para U, V abertos com $U \cup V \supset A$, $U \cap V = \emptyset$, então $U \cap A = A$ ou $U \cap A = \emptyset$.
- (2) A é conexo por caminhos se, para qualquer $x, y \in A$
 $\exists \gamma: [0, 1] \rightarrow A$ cont. tal que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

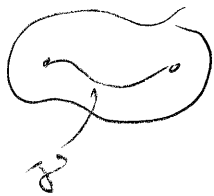
Exemplo. (1) (X, d) métrico, $A = A_1 \cup A_2$ com

$$d := d(A_1, A_2) = \inf \{ d(x, y) : x \in A_1, y \in A_2 \}$$

$$\text{Então, } B_{d/2}(A_1) \cap B_{d/2}(A_2) = \emptyset$$

$\Rightarrow A_1 \cup A_2$ não é conexo.

(2)



conexo por caminhos

Teo.

(1) Se $f: X \rightarrow Y$ contínuo. Então, se A é conexo, então $f(A)$ é conexo.

(2) Se $f: X \rightarrow Y$ contínuo. Então, — — — — — conexo por caminhos — — — — —

(3) conexo por caminhos $\Rightarrow$ conexo.

Prova. (1)-(2) triviais.

(3) Seja U, V abertos disjuntos t.q. $U \cup V \supset A$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$. Então, para $x \in U \cap A$, $y \in V \cap A$ e $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$, $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, então γ é contínuo, que é absurdo. $\square$

Exemplos:

$$A := A_1 \cup A_2, \text{ onde}$$

$$A_1 := \left\{ (x, \sin \frac{1}{x}) : x \in (0, \frac{2}{\pi}] \right\}$$

$$A_2 := \{0\} \times [-1, 1]$$



Prop: A é conexo, mas não é conexo por caminhos.

Prva: ① A_1, A_2 são conexos por caminhos.

$\Rightarrow$ " " " " conexos.

Dai, se U, V são abertos, disjuntos e $U \cup V = A$,
então $U \subset A_1$ e $V \subset A_2$. Como qualquer $x \in A_2$ é
ponto limite de A_1 , não é aberto.

$\Rightarrow A$ é conexo.

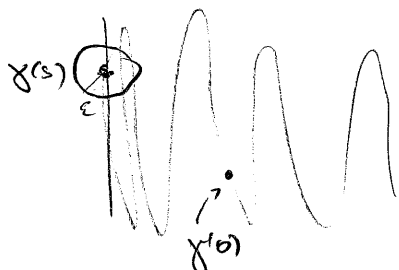
[Obs: Prva: A conexo $\Rightarrow \bar{A}$ conexo]

② Seja $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$ um caminho com $\gamma(0) \in A_1$ e
 $\gamma(1) \in A_2$.

$$\text{Seja } t := \inf \{s : \gamma(s) \in A_2\} \leq 1.$$

Para continuidade, para $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$,

$$|\gamma(t) - \gamma(s)| < \varepsilon \quad \forall \quad s < t, \quad |t-s| < \delta,$$



Basta escolher ε suf. pequeno para obter um contradicção.

Espacos top. separáveis

Def.: (1) Dizemos que $D \subset X$, $(X, \mathcal{T})$ top. é denso se,
 $\forall U \in \mathcal{T}, U \cap D \neq \emptyset$.

(2) X é separável se existe $D \subset X$ denso e separável.

Aplicações:

• Se X é separável, métrico e $x \in X$. Então, existe (x_n) em D tal que $\lim x_n = x$.

Prova. Escolha $x_n \in B_{1/n}(x)$.

• $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ é denso:

• Espacos compactos métricos são separáveis

Prop. (X, d) é separável $\Leftrightarrow \exists$ coleção enumerável de abertos $\mathcal{O}$
tal que, para qualquer U aberto, existe $U \subset \bigcup \mathcal{O}$ t.q.

$$U = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

Prova. Exercício.

Conclusão. (X, d) separável $\Rightarrow (A, d)$ separável para $A \subset X$. □

Exemplos:

(1) $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é separável em relação a $\|\cdot\|_\infty$:

Passo 1 Vamos mostrar que $C([-n, n])$ é separável.

De fato, usamos o argumento de aproximação:

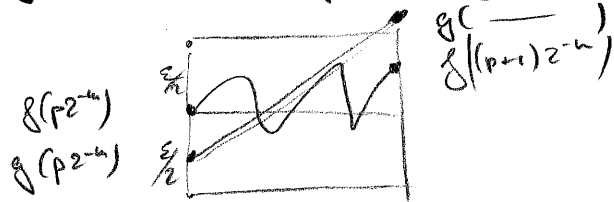
Seja $U \subset C([-u, u])$ aberto. Então, existe $f \in U$ e $\varepsilon > 0$,

$B_\varepsilon(f) \subset U$. Como $[-u, u]$ é compacto, f é unif. cont.

Dai, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 \quad \forall x, y: |x - y| < \delta$.

Escolhe $m: 2^{-m} < \delta$ e, para $x = p \cdot 2^{-m} \in [-u, u], p \in \mathbb{Z}$,

escolhe $g(x) \in \mathbb{Q} + g$. $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/2$.



Dai, em estender g ~~linearmente~~ ~~afim~~ a uma função afim por pedaços, obtém-se que

$$|f - g| < \varepsilon \quad \forall x \in [-u, u].$$

Como existe tem um número enumerável de tais funções, obtém-se que $C([-u, u])$ é separável. etc.

$$\textcircled{2} \quad \ell^1(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n) : a_n \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}.$$

$$\textcircled{1} \quad d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

$\textcircled{2}$ Mostre que $\ell^1(\mathbb{N})$ é separável:

Seja $x \in \ell^1(\mathbb{N})$ e $\varepsilon > 0$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n \geq N} |x_n| < \varepsilon/2.$$

Escolha $q_0 - q_{N-1} \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tal que

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_n - q_n| < \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow d(x, (q_0 - q_{N-1}, 0, \dots)) < \varepsilon.$$

□

(2) Seja $l^\infty(\mathbb{N}) := \{ (x_n) : x_n \in \mathbb{C}, \sup |x_n| < \infty \}$ e

$$d(x, y) = \sup |x_n - y_n|$$

Então, $l^\infty(\mathbb{N})$ não é separável.

Prova. Para $I \subset \mathbb{N}$, defina $e_I(n) := \frac{1}{I}(n)$.

$$\text{Daí, } d(e_I, e_J) = \begin{cases} 1 & : I \neq J \\ 0 & : I = J \end{cases}$$

$\Rightarrow \{ B_{1/2}(e_I) : I \subset \mathbb{N} \}$ é uma coleção
não-enumerável de conjuntos disjuntos.

Suponha que $D \subset l^\infty(\mathbb{N})$ é denso. Então, existe

um aplicação injetora

$$\mathcal{I} \rightarrow D$$

□

O teorema de Arzelà - Ascoli / A prova...

Def. Um subconjunto $A \subset C(X)$, (X, d) métrica, é equicontínuo se, para qualquer $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:
 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y : d(x, y) < \delta$.

Exemplo: $A \subset C([0, 1])$ dif. se $\|f'\|_\infty < M \quad \forall f \in A$.

Lemma. Seja X separado e (f_n) uma sequência equicontínua tal que $\sup_n |f_n(x)| < \infty \quad \forall x$. Então, existe $n_k \nearrow \infty$ tal que
$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) =: f(x)$$
 existe $\forall x \in X$.

Prova (Argumento diagonal de Cantor).

~~Seja~~ Seja $D \subset X$ denso e numerável. Escolha uma enumeração de D : $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\{f_k(x_n) : k\}$ é limitado, $(f_k(x_n))_k$ possui um ponto de acumulação por Bolzano-Weierstrass.

Daí, por indução:

Seja $n_k^{(1)} \nearrow \infty$ seq. tal que $\lim_k f_{n_k^{(1)}}(x_1) =: f(x_1)$ existe. Seja $(n_k^{(2)})$ uma subsequência de $(n_k^{(1)})$ tal que
$$\lim_k f_{n_k^{(2)}}(x_2) =: f(x_2) \text{ existe.}$$

Per indução:

$(n_k^{(j)})$ é seq. de $(n_k^{(j-1)})$ e $f(x_j) = \lim_k f_{n_k^{(j)}}(x_j)$.

Ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^{(k)}(x_j) = f(x_j) \quad \text{existe para qualquer } j.$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^{(k)} = f \quad \text{em } D.$$

Basta mostrar que $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^{(k)} = f$ em X :

Seja $x \in X$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall \quad y: d(y, x) < \delta, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Escolha $y \in B_\delta(x) \cap D$. Como $(f_{n_k}^{(k)}(y))$ é Cauchy,

$$\text{existe } N \in \mathbb{N}: |f_{n_k}^{(k)}(y) - f_{n_l}^{(l)}(y)| < \varepsilon \quad \forall \quad k, l \geq N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |f_{n_k}^{(k)}(x) - f_{n_l}^{(l)}(x)| &\leq |f_{n_k}^{(k)}(x) - f_{n_k}^{(k)}(y)| + |f_{n_k}^{(k)}(y) - f_{n_l}^{(l)}(y)| \\ &\quad + |f_{n_l}^{(l)}(y) - f_{n_l}^{(l)}(x)| \\ &\leq 3\varepsilon \quad \forall \quad k, l \geq N. \end{aligned}$$

Dai, $(f_{n_k}^{(k)}(x))$ é Cauchy $\forall x \in X$.

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}^{(k)} = f \quad \text{em } X. \quad \square$$

Def. (f_n) é uniformemente equicontínua se: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y: d(x, y) < \delta$.

Teorema. Seja (X, d) métrica, compacto e (f_n)

uma sequência ~~(uniformemente)~~ equicontínua ^{e uniformemente limitada}. Então, existe

uma subsequência (n_k) e uma função f contínua tal que

$f_{n_k} \rightarrow f$ uniformemente:

$$\|f_{n_k} - f\|_\infty = \sup \{ |f_{n_k}(x) - f(x)| : x \in X \} \longrightarrow 0.$$

Vamos provar o teorema sob a hipótese de equicont. unif.,

e then a condições depois.

Prova. Como (X, d) é espectral, existe (g_n) com $g_n \rightarrow f$ pontualmente. Vamos mostrar que f é contínua e que $g_n \rightarrow f$ uniformemente. S.p.d.g. $n_k = k$.

① Pela def. eq. cont.: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |g_n(x) - g_n(y)| < \varepsilon$
 $\forall x, y : d(x, y) < \delta \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Pela convergência pontual: $\exists N : |g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ e
 $|g_n(y) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall n > N$.

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |g_n(x) - f(x)| + |g_n(y) - f(y)| < 2\varepsilon$$

$\Rightarrow f$ é contínua.

② Convergência uniforme: Aqui, temos que trabalhar um pouco mais: (a) Seja ε, δ dados pela ~~condição~~ eq. cont. uniforme.

(b) Como X é compacto, X é totalmente limitado e podemos cobrir X com $\{B_\delta(x_i) : i = 1, \dots, d\}$ para uma escolha de pontos $x_1, \dots, x_d$.

(c) Como no argumento anterior: $\exists N$:

$$|g_n(x_i) - g_m(x_i)| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N, i = 1, \dots, d.$$

$\Rightarrow$ Para $x \in X$, e $x \in B_\delta(x_i)$:

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g_n(x_i)| + |g_n(x_i) - g_m(x_i)| + |g_m(x_i) - g_m(x)| < 3\varepsilon \quad \forall n, m \geq N$$

$\Rightarrow (g_n)$ é sequência de Cauchy em relação

com $\|\cdot\|_\infty$

□

Lemma: Seja (X, d) compacto e (f_n) equicont. Então,

(f_n) é unif. equicont.

Prova: Pela def., $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall x \in X$ $\exists \delta_x > 0$:

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon \quad \forall y \in B_{\delta_x}(x).$$

Seja $\delta > 0$ o mím. de Lebesgue de $\{B_{\delta_x}(x) : x \in X\}$.

~~Dai, para $x, y \in X$ com $d(x, y) < \delta$, existe $g \in X$ tal que $x, y \in B_{\delta_g}(g)$.~~

Dai, para qualquer $A \subset X$ com $\sup\{d(x, y) : x, y \in A\} < \delta$

$$\exists g \in X : A \subset B_{\delta_g}(g).$$

Ou seja, para $x, y \in X$, $d(x, y) < \delta \implies \exists g$:

$$x, y \in B_{\delta_g}(g).$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < |f_n(x) - f_n(g)| + |f_n(g) - f_n(y)| < 2\varepsilon$$

□

Outra prova: Podemos tirar a conclusão da eq. acima do teorema.

Versões do teorema:

(1) (X, d) compacto. Então $K \subset C(X)$ é compacto $\iff K$ é fechado, limitado e equicontínuo.

(2) (X, d) separável e (f_n) unif. limitado e unif. equicont.

$$\Rightarrow \exists n_k \nearrow \infty : f_{n_k} \rightarrow f \in C(X).$$

Teorema (Ponto fixo de Banach)

Seja (X, d) completo e $T: X \rightarrow X$ uma aplicação tal que $\exists \lambda \in (0, 1) : d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y)$.

Então, $\exists!$ $x \in X : Tx = x$.

Prova: Mostre que $(T^n x)$ é Cauchy.

Aplicações no EDO

$$F: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

I intervalo aberto, $x \in I$

$U \subset \mathbb{R}^n$ aberto

F cont.

$$\begin{cases} u: J \subset I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ é sol. se} \\ u' = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Peano: u existe

Para: Arzela - Ascoli

Picard - Lindelöf / Cauchy - Lipschitz

Se F é Lipschitz na 2ª variável: u é unicamente determinada.