$2^{\underline{a}}$ Prova - Introdução a teoria ergódica

5 de dezembro de 2024
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito

Questão 1. (2p) Seja $X := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $F_n(z) := z^n$. Mostre que (X, F_2, Leb) e (X, F_3, Leb) não são conjugados na categoria mensurável. Em outras palavras, não existe um mapa bimensurável $\psi : X \to X$ bimensurável tal que $\text{Leb} \circ \psi = \text{Leb}$ e $F_2 \circ \psi = \psi \circ F_3$.

Solução 1. Suponha que existe um tal ψ. Então, pela construção, $h(F_2) = h(F_3)$. Mostraremos que $h_{\text{Leb}}(F_2) \neq h_{\text{Leb}}(F_3)$: Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\{(k/n, (k+1)/n) : k = 0, \ldots, n-1\}$ é uma partição geradora. Pela formula de Rokhlin,

$$h_{\text{Leb}}(F_n) = \int \log T' \, d\text{Leb} = \log n.$$

Versão independente da formula de Rokhlin: X pode ser identificado com $[0,1]$ mod Lebesgue. Seja $\alpha_k := \{[0, 1/n^k), [1/n^k, 2/n^k) \cdots\}$. Com $F_n^k|[\ell/n^k, (\ell+1)/n^k) \to [0,1)$ é sobrejetor e 1-1,

$$\alpha_k = \bigvee_{\ell=0}^{k-1} T^{-\ell} \alpha_1,$$

e α_1 é um gerador. Daí,

$$\begin{aligned} h(F_n) &= \lim_k \frac{1}{k} H(\alpha_k) = \lim_k \frac{1}{k} - \sum_{A \in \alpha_k} \text{Leb}(A) \log \text{Leb}(A) \\ &= \lim_k \frac{1}{k} - \sum_{A \in \alpha_k} n^{-k} \log n^k = \log n. \end{aligned}$$

Questão 2. (2p) Seja (X, μ) um espaço de probabilidade e $\mathscr{P}$ o conjunto das partições finitas sem átomos de medida zero (i.e. $\alpha \in \mathscr{P}$ se $\#\alpha < \infty$ e $\mu(A) > 0$ para qualquer $A \in \alpha$). Mostre que

$$d(\alpha, \beta) := H(\alpha|\beta) + H(\beta|\alpha)$$

define uma distância em $\mathscr{P}$ mod μ.

Dica. $H(\alpha \vee \beta|\gamma) = H(\beta|\gamma) + H(\alpha|\beta \vee \gamma)$.

Solução 2. É conhecido que $H(\alpha|\beta) = 0$ if and only if β is finer than α mod μ. Hence, $d(\alpha,\beta) = 0$ se e somente se $\alpha = \beta$ mod μ. Além disso,

$$\begin{aligned} H(\alpha|\gamma) &\leq H(\alpha \vee \beta|\gamma) \\ &= H(\beta|\gamma) + H(\alpha|\beta \vee \gamma) \\ &\leq H(\beta|\gamma) + H(\alpha|\beta) \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} d(\alpha,\gamma) &= H(\alpha|\gamma) + H(\gamma|\alpha) \\ &\leq H(\beta|\gamma) + H(\alpha|\beta) + H(\gamma\beta) + H(\beta|\alpha) = d(\alpha,\beta) + d(\beta,\gamma). \end{aligned}$$

Questão 3. (1+ 3p) Sejam $(X, T, \mathscr{B}, \mu)$ e $(Y, S, \mathscr{C}, \nu)$ sistemas dinâmicos com probabilidades invariantes e $\pi : X \to Y$ mensurável tal que $\pi \circ T = S \circ \pi$ e $\nu = \mu \circ \pi^{-1}$.

(1) Mostre que $h_\mu(T) \geq h_\nu(S)$.
(2) Suponha que $\sigma\left(\bigvee_{k=0}^{\infty} T^k \pi^{-1}(\mathscr{C})\right) = \mathscr{B}$ mod μ e que T é bimensurável. Mostre que $h_\mu(T) = h_\nu(S)$.

Solução 3. a) Seja α partição de Y. Então, $\pi^{-1}(\alpha)$ é uma partição de X. Daí,

$$-\sum_{A\in\alpha} \nu(A)\log\nu(A) = -\sum_{A\in\alpha} \nu(\pi^{-1}(A))\log\nu(\pi^{-1}(A)) = -\sum_{B\in\pi^{-1}(\alpha)} \mu(B)\log\mu(B).$$

Ou seja, como a entropia é um supremo, $h_\mu(T) \geq h_\nu(S)$.

b) Seja α uma partição finita de Y e $\epsilon > 0$. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$H(\alpha_0^{n-1}) = n(h_\mu(T,\alpha) \pm \epsilon).$$

Pela hipotese, $\sigma \bigvee_{k=0}^{\infty} T^k \pi^{-1}(\mathscr{C}) = \mathscr{B}$ mod μ. Daí, existe uma sequência de partições β_m de X tal que $T^m \pi^{-1}(\beta_m) \xrightarrow{m\to\infty} \alpha$ mod μ. Daí,

$$H((T^m \pi^{-1}(\beta_m))_0^{n-1}) \xrightarrow{m\to\infty} H(\alpha_0^{n-1}).$$

Porém, usando o fato que $H(\gamma) = H(\gamma \circ T)$, obtemos que

$$H((\pi^{-1}(\beta_m))_0^{n-1}) = H((T^m \pi^{-1}(\beta_m))_0^{n-1}) \xrightarrow{m\to\infty} H(\alpha_0^{n-1}).$$

A afirmação é uma consequência de $H_\mu((\pi^{-1}(\beta_m))_0^{n-1}) = H_\nu((\beta_m)_0^{n-1})$.

Questão 4 (1 + 2 p). Seja $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ e $T : X \to X$, $(x,y) \mapsto (2x + y, 3y)$.

a) Determine a entropia da medida de Lebesgue.
b) Mostre que a medida de Lebesgue é uma medida da entropia máxima.

Solução 4. a) Vamos analisar o mapa T. Note que DT tem autovalores 2 e 3 e, em particular, é diagonalizável. Em particular, se z_1, z_2 são suficientemente pertos, então

$$2 \leq d(T(z_1), T(z_2))/d(z_1, z_2) \leq 3.$$

Daí, o mapa é expansor.
Em particular, como a medida de Lebesgue é invariante,

$$h_{\mathrm{Leb}}(T) = \int \log \det DT \, d\mathrm{Leb}(T) = \log 6.$$

Versão independente do Rokhlin: utilize os autovetores $(1,0), (1,1)$ para definir uma partição geradora.

b) Para mostrar que a medida de Lebesgue é uma medida da entropia maxima, basta determinar a pressão do potential zero (i.e., a entropia topologica). Pelo primeiro parte e o principio variacional, sabemos que $h_{\mathrm{top}}(T) \geq \log 6$.
Suponha que $h_{\mathrm{top}}(T) > \log 6$. Então, existem $\epsilon, \delta > 0$ tal que, para qualquer n suficientemente grande, existe um conjunto F_n que é (n, ϵ)-separado e $\# F_n > (6+\delta)^n$.
Agora, suponha que $x \in F_n$ e que τ_x^{-n} é o ramo inverso associado ao x. Define $U_x := \tau_x^{-n}(B_(\epsilon/2)(T^n x))$. Pela mudança de variáveis, $\mathrm{Leb}(U_x) = (\det DT)^{-n} \pi(\epsilon/2)^2$.
E como F_n é (n, ϵ)-separado, $U_x \cap U_y = \emptyset$. Daí,

$$1 \geq \sum_{x \in F_n} \mathrm{Leb}(U_x) > (6+\delta)^n 6^{-n} \pi(\epsilon/2)^2 \xrightarrow{n \to \infty} \infty.$$

Questão 5 (2 + 1 p). Seja $Y = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, σ o shift e

$$\pi : Y \to X, (x_i : i \in \mathbb{Z}) \mapsto (x_i : i \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

Além disso, suponha que $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq e^{-\min\{i \geq 0 : x_i \neq y_i \text{ ou } x_{-i} \neq y_{-i}\}}.$$

a) Mostre que existem funções $\varphi_+ : X \to \mathbb{R}$ e $u : Y \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi = \varphi_+ \circ \pi + u - u \circ \sigma$.
b) Construa uma bijeção entre os estados de equilíbrio de (Y, σ, φ) e (X, σ, φ_+).

Solução 5. a) Para $x \in Y$, define $\hat{(}x) := (\ldots 0, x_0, x_1, \ldots)$. Pela regularidade de φ,

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(\sigma^i x) - \varphi(\sigma^i \hat{x}) \right| \leq \sum_{i=0}^{\infty} e^{-i} = e/(e-1).$$

Daí, a soma e absolutamente convergente. Em particular,

$$u(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(\sigma^i x) - \varphi(\sigma^i \hat{x})$$

é bem definida e contínua. Além disso, a convergência implica que

$$u(x) - u(\sigma x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(\sigma^i x) - \varphi(\sigma^i \hat{x}) - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(\sigma^i x) - \varphi(\sigma^i \hat{x}) = \varphi(x) - \varphi(\hat{x}).$$

Basta definir $\varphi_+(x) := \varphi(\dots 00x_0, x, 1\dots)$, para $x \in X$.

b) Como $\varphi = \varphi_+ \circ \pi + u - u \circ \sigma$, obtém-se que $\int \varphi dm = \int \varphi_+ \circ \pi dm$, para cada probabilidade invariante m, e que $P(\sigma, \varphi) = P(\sigma, \varphi_+ \circ \sigma)$. Além disso, a aplicação da questão 3b) implica que, para cada m em (Y, σ)-invariante, que $h_m(\sigma : Y \to Y) = h_{m\circ\pi^{-1}}(\sigma : X \to X)$. Daí, se m é um estado de equilíbrio de (X, σ, φ), a medida transportada $m \circ \pi^{-1}$ e invariante e, pelo principio variacional,

$$P(Y, \sigma, \varphi) = h_m(\sigma) + \int_Y \varphi dm = h_{m\circ\pi^{-1}}(\sigma) + \int_X \varphi_+ dm \circ \pi^{-1} \le P(X, \sigma, \varphi_+).$$

Do outro lado, se m é (X, σ)-invariante, a extensão natural $(Y, \sigma, \hat{m})$ de (X, σ, m) é bem definida e (Y, σ)-invariante. Dai, de novo pelo principio variacional,

$$P(X, \sigma, \varphi_+) = h_m(\sigma) + \int_X \varphi_+ dm = h_{\hat{m}}(\sigma) + \int_Y \varphi d\hat{m} \le P(Y, \sigma, \varphi).$$

Em particular, $m \mapsto m \circ \pi^{-1}$ é uma bijeção entre os estados de equilibrio de (Y, σ, φ) e (X, σ, φ_+).