$1^{\underline{a}}$ Prova - Introdução a teoria ergódica

12 de novembro de 2024

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Questão 1. (1p + 1p + 1p + 1p + 2p) Seja $(X, \mathscr{B}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $T : X \to X$ mensurável com $\mu = \mu \circ T^{-1}$. Define

$$S : X \times \{-1, 1\} \to X \times \{-1, 1\}, \quad (x, j) \mapsto (Tx, -j),$$

e, para $A \in \mathscr{B}$ e $j \in \{-1, 1\}$, $\nu(A, j) := \frac{1}{2}\mu(A)$.

a) Mostre que a medida ν é uma probabilidade S-invariante.
b) Mostre que $(X \times \{-1, 1\}, \nu, S)$ nunca é weak-mixing.
c) Suponha que (X, μ, T) é ergódico. Mostre que $(X \times \{-1, 1\}, \nu, S)$ não é necessariamente ergódico.
d) Suponha que (X, μ, T) é misturador. Mostre que $(X \times \{-1, 1\}, \nu, S)$ é ergódico.
e) Suponha que (X, μ, T) é fracamente misturador. Mostre que $(X \times \{-1, 1\}, \nu, S)$ é ergódico.

Solução 1. a) Seja $A \in \mathscr{B}$ e $j \in \{-1, 1\}$. Então,

$$S^{-1}(A \times \{j\}) = \{(x, i) : Tx \in A, -i = j\} = T^{-1}(A) \times \{-j\}.$$

Daí,

$$2\nu(S^{-1}(A \times \{j\})) = 2\nu(T^{-1}(A) \times \{-j\}) = \mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) = 2\nu(A \times \{j\}).$$

b) Seja $A := X \times \{1\}$. Então, $\nu(A) = 1/2$ e

$$T^{-n}(A) \cap A = \begin{cases} \emptyset & n \text{ impar} \\ A & n \text{ par} \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\nu(A)^2 - \nu(A \cap T^{-n}A)| &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} |\nu(A)^2 - \nu(A \cap T^{-2n}A)| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq 0. \end{aligned}$$

c) Seja $X = \{-1, 1\}$ e $Tx = -x$. Então,

$$S^{-1}(\{(1, 1)\} \cup \{(-1, -1)\}) = \{(-1, -1)\} \cup \{(1, 1)\}.$$

Daí, $\{(1, 1)\} \cup \{(-1, -1)\}$ é um conjunto invariante de medida 1/2. Ou seja, S não é ergódico.

d) Seja $A \subset X \times \{1\}$ mensurável tal que $\nu(A) > 0$. Então, pelo teorema de Birkhoff,

$$f := \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1_A \circ S^k$$

existe qtp e $\int f d\nu = \nu(A)$. Suponha que $f \neq \nu(A)$ qtp. Então, para $B := \{(x,i) : f(x,i) > \nu(A)\}$, $\nu(B) > 0$. Seja $B_\pm := B \cap (X \times \{\pm 1\}) = B_\pm^{(o)} \times \{\pm 1\}$. Então, usando no último passo o fato que T é misturador,

$$\begin{aligned}\nu(A)\nu(B_+) &< \int 1_{B_+} f d\nu = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int 1_A \circ S^k 1_{B_+} d\nu = \lim_n \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \mu(T^{-2n}(A^{(o)}) \cap B_+^{(o)}) \\ &= \frac{1}{4} \mu(A^{(o)}) \mu(B_+^{(o)}) = \nu(A)\nu(B_+).\end{aligned}$$

Daí, $\nu(B_+) = 0$. Do mesmo jeito, obtém-se que $\nu(B_-) = 0$. Ou seja, f é constante e S é ergódico.

e) Adaptação da prova anterior, usando o fato que $\mu(T^{-2n}(A^{(o)}) \cap B_+^{(o)}) \to \mu(A^{(o)})\mu(B_+^{(o)})$ fora de um conjunto de densidade 0.

Questão 2 (**2 p**)**.** Mostre que a rotação irracional não é fracamente misturador (weak mixing).

Solução 2. Basta mostrar que $T \oplus T$ não é ergódico. Para construir uma função invariante, usaremos as series de Fourier. Para $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$ e $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{T}^2$,

$$e^{\pi i \langle k, T \oplus T x \rangle} = e^{\pi i \langle k, x \rangle + \pi i \langle k, (\rho, \rho) \rangle}.$$

Para $k_1 = -k_2$, obtém-se que $e^{\pi i \langle k, T \oplus T x \rangle} = e^{\pi i \langle k, x \rangle}$. Daí, $T \oplus T$ não é ergódico e T não é weak mixing.

Questão 3 (**2 p**)**.** Dê o enunciado do teorema da decomposição ergódica de uma aplicação $T : X \to X$ de um espaço polonês munido com uma probabilidade μ tal que $\mu = \mu \circ T^{-1}$.

Questão 4 (**1p + 1p + 2p (extra)**)**.** Seja (X, d) espaço métrico compact, $T : X \to X$ contínua e μ uma medida T-invariante. Além disso, seja $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$, $\gamma : X \to \mathbb{S}^1$ uma função contínua,

$$S(x,t) : X \times \mathbb{S}^1, \quad (x,t) \mapsto (Tx, \gamma(x)t),$$

e $m := (\mathrm{Leb}(\mathbb{S}^\mathbb{1}))^{-1}\mathrm{Leb}$ a medida de Lebesgue normalizada em $\mathbb{S}^1$.

a) Mostre que o produto $\mu \otimes m$ é S-invariante.

b) Seja $c \in \mathbb{S}^1$ e

$$E := \left\{ (x,t) \in X \times \mathbb{S}^1 : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ S^k(x,t) = \int f d\mu \otimes m \; \forall f \in C(X \times \mathbb{S}^1) \right\}.$$

Mostre que $(x,t) \in E$ se e somente se $(x, ct) \in E$.

c) Suponha que T é unicamente ergódica e $\mu \otimes m$ é ergódica. Mostre que S é unicamente ergódica.

Solução 3. a) Por Fubini,

$$\int f \circ S d\mu \otimes m = \int f(Tx, \gamma(x)t) d\mu(x) dm(t) = \int f(Tx, t) d\mu(x) dm(t)$$
$$= \int f(x,t) d\mu(x) dm(t) = \int f d\mu \otimes m$$

b) Seja $f_c(x,t) := f(x, tc)$. Então, $\int f d\mu \otimes m = \int f_c d\mu \otimes m$. Daí, para $(x,t) \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ S^k(x, ct) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k, ct\gamma(x) \cdots \gamma(T^{k-1}x))$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f_c \circ S^k(x,t) = \int f_c d\mu \otimes m = \int f d\mu \otimes m$$

c) Note que, para $\pi : X \times \mathbb{S}^1 \to X, (x,t) \mapsto x, \pi \circ S = T \circ \pi$. Daí, se ν é probabilidade S-invariante, $\nu \circ \pi^{-1} \circ T^{-1} = \nu \circ S^{-1} \circ \pi^{-1} = \nu \circ \pi^{-1}$. Como T é unicamente ergódica, $\nu \circ \pi^{-1} = \mu$.
Suponha que ν é ergódica. Pelo teorema de Birkhoff existe para qualquer $f \in C(X \times \mathbb{S}^{\mathbb{1}})$ um conjunto Ω_f de medida ν total tal que

$$(*) : \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ S^k(x,t) = \int f d\nu$$

para qualquer $(x,t) \in \Omega_f$. Como $C(X \times \mathbb{S}^{\mathbb{1}})$ é separável, existe um conjunto Ω de medida ν total tal que $(*)$ vale para qualquer $(x,t) \in \Omega$ e f num subconjunto denso em $C(X \times \mathbb{S}^{\mathbb{1}})$ (em relação com $\|\cdot\|_\infty$).
Vamos mostrar que $(*)$ vale para qualquer $(x,t) \in \Omega$ e $f \in C(X \times \mathbb{S}^{\mathbb{1}})$: Suponha que $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. Então

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ S^k(x,t) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ S^k(x,t) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \|f - g\|_\infty < \epsilon$$

Daí, pela convergencia dominada, $(*)$ vale para qualquer $(x,t) \in \Omega$ e $f \in C(X \times \mathbb{S}^{\mathbb{1}})$.
Em particular, $(x,t) \in \Omega \iff (x, ct) \in \Omega$, para $c \in \mathbb{S}^1$ qualquer. Ou seja, $\Omega = \Omega^{(0)} \times \mathbb{S}^1$.
Pela desintegração de medidas, $d\nu(x,t) = dp_x(t) d\mu(x)$, para uma familia de medidas de probabilidade $\{p_x\}$. Daí, $\mu(\Omega^{(0)}) = 1$.
Seja $g : X \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ contínua e $g_c(x,t) := g(x, ct)$. Então, para $x \in \Omega^{(0)}$ e $t \in \mathbb{S}^1$,

$$\int g_c d\nu = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_c \circ S^k(x,t)$$
$$= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g \circ S^k(x, ct) = \int g d\nu$$

Ou seja, a medida $\nu(A \times B) = \nu(A \times cB)$ para qualquer $c \in \mathbb{S}^1$. Ou seja, $p_A(B) := \nu(A \times B)/\nu(A \times \mathbb{S}^1)$ é uma medida invariante sob translações. Em particular, $p_A = m$. Como estamos no espaço polonês, $p_x = m$.