O teorema de Ruelle - Perron - Frobenius

① Aplicações "Ruelle expanding"

Seja (X, d) métrico compacto e $T: X \to X$ tal que existe $r > 0$ e $\lambda \in (0,1)$:

① Para $x, \bar{y}$ tal que $d(Tx, \bar{y}) < r$ $\exists!$ $y \in X$ tal que $Ty = \bar{y}$ e $d(x,y) < \lambda$ ~~...~~ $d(Tx, Ty)$

② Todas as preimagens são obtidas deste jeito.

Exemplos: 1) M variedade, T difeo local tal que
$$\inf \left\{ \frac{\| DT v \|}{\| v \|} : v \neq 0 \right\} > 1 .$$

2) C o conjunto de Cantor, $Tx = 3x \bmod 1$.

3) Espaços de Shift.

Propriedades: ① As condições ①,② dizem que ao redor de qualquer ponto, tem um ramo inverso bem definido:
$$\begin{aligned} \tau_x : B_r(\bar{x}) &\longrightarrow X , \quad \text{onde } Tx = \bar{x} \\ y &\longmapsto \tau_x(y) \end{aligned}$$
tal que ① $T \circ \tau_x = id$, ② $d(\tau_x(y_1), \tau_x(y_2)) < \lambda\, d(y_1, y_2)$
③ $x \in \tau_x(B_r(\bar{x}))$

② É fácil mostrar que T^n é tb. Ruelle-expanding, com parâmetros λ^n e r. Daí, para $x \in X$:
$$\begin{aligned} \tau_x^n : B_r(T^n x) &\longrightarrow X \\ y &\longmapsto \tau_x^n(y) \end{aligned}$$
é bem def. e $T^n \circ \tau_x^n = id$ ...

Agora, suponha que φ é ~~Lipschitz~~ Hölder. Então, para $\bar{x}, \bar{y}$, $d(\bar{x},\bar{y}) < r$, e $T^n x = \bar{x}$

$$S_n \varphi(\tau_x^n(\bar{x})) - S_n\varphi(\tau_x^n(\bar{y}))$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\circ T^k(x) - \varphi\circ T^k(y)$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} \text{Höl}(\varphi)\, \underbrace{d(T^k x, T^k y)}_{\leq \lambda^{n-k} d(\bar{x},\bar{y})^\alpha} \leq \frac{1}{1-\lambda} \text{Höl}(\varphi)\, . \, d(\bar{x},\bar{y})^\alpha.$$

Ou seja, $(S_n\varphi)\circ \tau_x^n$ é "equi-Hölder".

<u>Definição:</u> Dado φ Hölder, o operador de Ruelle é def. por.

$$\mathcal{L}_\varphi(f)(x) := \sum_{Ty=x} e^{\varphi\circ\tau_y(x)} f\circ\tau_y(x) = \sum_{Ty=x} e^{\varphi(y)} f(y).$$

<u>Def.</u>: T é <u>top. transitivo</u> se $\forall$ U,V aberto, existe $n\in\mathbb{N}$: $U\cap T^{-n}V \neq \emptyset$. T é <u>top. misturador</u> se $\forall$ U,V abertos existe $N\in\mathbb{N}$: $U\cap T^{-n} V\neq\emptyset$ $\forall n\geq N$.

<u>Lema.</u> Seja T R-expanding, φ Hölder. Então, para $d(x,y) < r$, f Hölder :

$$|\mathcal{L}_\varphi^n(f)(x) - \mathcal{L}_\varphi^n(f)(y)|$$
$$\leq C$$

Se T é top. misturador, então

$$\mathcal{L}^n(\mathbb{1})(x) \asymp \mathcal{L}^n(\mathbb{1})(y) \qquad \forall\, x,y\in X$$

Prova.

(a) $$\mathcal{L}^n(g)(x) - \mathcal{L}^n(g)(y) = \sum_{T^n\xi = x} e^{S_n\varphi\circ\tau_\xi^n(x)} g\circ\tau_\xi(x) - e^{S_n\varphi\circ\tau_\xi(y)} g\circ\tau_\xi(y)$$

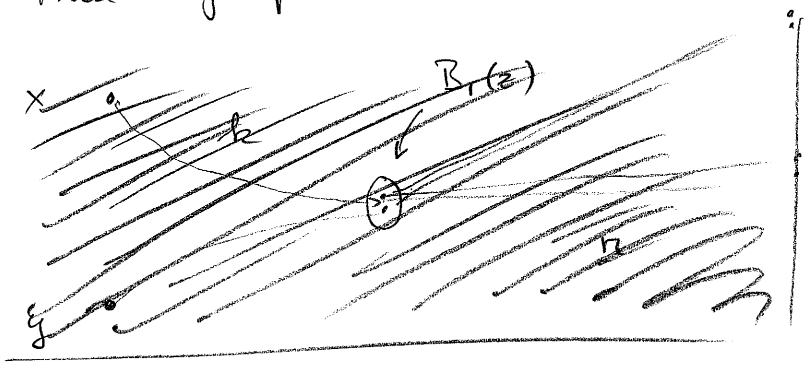
$$\leq \sum_{T^n\xi=x}' \underbrace{\left| e^{S_n\varphi\circ\tau_\xi^n(x)} - e^{S_n\varphi\circ\tau_\xi^n(y)}\right| \left| g\circ\tau_\xi^n(x)\right|}_{\leq e^{S_n\varphi\circ\tau_\xi^n(x)} |g\circ\tau_\xi^n(x)| \cdot C\, d(x,y)^\alpha}$$

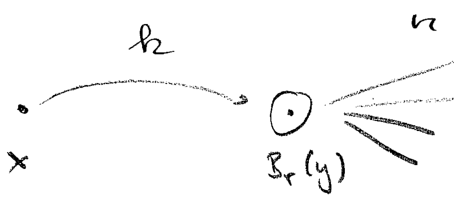
$$+ \sum_{T^n\xi=x} e^{S_n\varphi\circ\tau_\xi^n(y)} \underbrace{\left| g\circ\tau_\xi(x) - g\circ\tau_\xi(y)\right|}_{\leq \mathrm{Hol}(g)\, d(x,y)^\alpha \lambda^n}$$

$$\leq d(x,y)^\alpha \left(C\cdot \mathcal{L}^n(|g|)(x) + \mathcal{L}^n(\mathbb{1})(y) \mathrm{Hol}(g)\lambda^n \cancel{d(x,y)^\alpha}\right)$$

$$\leq C\,\mathcal{L}^n(\mathbb{1})(x)\, d(x,y)^\alpha \left(\|g\|_\infty + \mathrm{Hol}(g)\lambda^n\right)$$

(b) Prova gráfica.





Nesta situação:

$$\mathcal{L}^{n+k}(\mathbb{1})(x) = \sum_{T^{n+k}(\xi)=x}' e^{S_{n+k}\varphi\circ\tau_\xi^{n+k}(x)}$$

$$\leq \sum_{\substack{T^{n+k}(\xi)=x,\\ T^n\xi\in B_r(y)}}' e^{S_{n+k}\varphi\circ\tau_\xi^{n+k}(x)}$$

$$\overset{(a)}{\leq} C\, \mathcal{L}^k(\mathbb{1}_{B_r(y)})(x)\, \mathcal{L}^n(\mathbb{1})(y)$$

Basta mostrar que k pode ser escolhido uniformemente, usando mixing + compacidade. $\square$

Agora: Acoplamentos

Sejam μ, ν probabilidades em X. Então, qualquer probabilidade P em X^2 tal que

$$\int f(x)\, dP(x,y) = \int f\, d\mu \quad e \quad \int f(y)\, dP(x,y) = \int f\, d\nu,$$

é um acoplamento de μ, ν. (ou "transporte").

Ideia: Suponha que $\mathcal{L}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Então, $\mathcal{L}^*$ age nas medidas de probabilidade.

Suponha que P é acoplamento de $(\mathcal{L}^n)^*(\delta_x)$ e $(\mathcal{L}^n)^*(\delta_y)$, tal que $\int d(x,y)^\alpha\, dP < \varepsilon\, d(x,y)^\alpha$. Então, para f Hölder:

$$\mathcal{L}^n(f)(x) - \mathcal{L}^n(f)(y)$$
$$= \int f\, d(\mathcal{L}^n)^*(\delta_x) - \int f\, d(\mathcal{L}^n)^*(\delta_y)$$
$$= \int f(x) - f(y)\, dP(x,y)$$
$$\leq \int \text{Höl}(f)\, d(x,y)^\alpha\, dP(x,y) \leq c\, \text{Höl}(f)\, d(x,y)^\alpha.$$

Ou seja, para controlar os iterados de $\mathcal{L}^n(f)$, basta construir acoplamentos P_n com um decaimento bom.

Teorema: Suponha que φ é Hölder e T top. misturador tal que $\mathcal{L}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Então, ~~para~~ existe $0 \le \rho < 1$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in X$ existe um acoplamento $P_n^{x,y}$ ~~tal que~~ de $(\mathcal{L}^n)^*(\delta_x)$ e $(\mathcal{L}^n)^*(\delta_y)$ tal que

$$\int d(x,y)^\alpha \, dP_n^{x,y} \le C \cdot \rho^n \, d(x,y)^\alpha .$$

Corolário: $\exists$ prob. μ tal que, para cada f Hölder,

$$\| \mathcal{L}^n(f) - \int f \, d\mu \|_{Höl} \le C \rho^n \, Höl(f) .$$

Prova do corolário.

Sejam μ, ν ~~acoplados~~ medidas de probabilidade e P um acoplamento de μ e ν. Então, por um cálculo imediato:

$$Q_n := \int P_n^{x,y} \, dP(x,y) \text{ é acoplamento de } (\mathcal{L}^n)^*(\mu) \text{ e } (\mathcal{L}^n)^*(\nu).$$

Além disso, $\int d(x,y)^\alpha dQ_n(x,y) \le C \rho^n \int d(x,y)^\alpha dP$.

Fato: $W(\mu,\nu) := \inf \left\{ \int d(x,y)^\alpha \, dP : P \text{ acoplamento de } \mu, \nu \right\}$

é uma métrica no espaço das probabilidades

$\Rightarrow \mathcal{L}^*$ é uma contração no espaço "

$\Rightarrow \exists!$ ponto fixo com $\mathcal{L}^*(\mu) = \mu$.

Para provar que $\| \mathcal{L}^n(f) - \mu(f) \|_\infty \longrightarrow 0$, basta aplicar o acoplamento Q_n para μ e δ_x.

O cálculo do coeficiente de Hölder é consequência do anterior

Prova do teorema.

(1) Suponha que $d(x,y) < r$. Define

$$R^n_{x,y} := \sum_{T^n \xi = x}' \min\{ e^{S_n\varphi \circ \tau^n_\xi(x)}, e^{S_n \varphi \circ \tau^n_\xi(y)} \} \, \delta_{\tau^n_\xi(x), \tau^n_\xi(y)}$$

Por definição. (1) $R^n_{x,y}$ é um sub-acoplamento de $(\mathcal{L}^n)^*(\delta_x), (\mathcal{L}^n)^*(\delta_y)$,

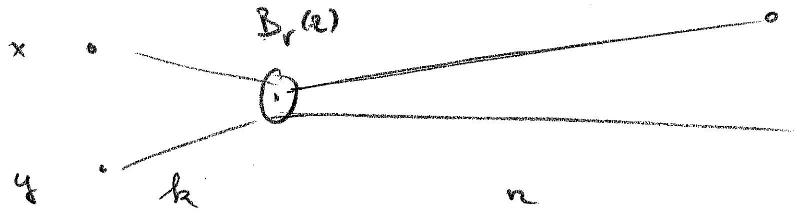
mas $\int \mathbb{1} \, dR^n_{x,y} \geq 1 - C d(x,y)^\alpha$.

(2) $\int d(\xi, \eta) \, dR^n_{x,y} \leq \underbrace{\sum_{T^n \xi = x} e^{\text{---}(x)}}_{=1} \cdot \lambda^n d(x,y)^\alpha$

Para obter um acoplamento, basta adicionar o "resto"

$$Q^n_{x,y} := \frac{\left((\mathcal{L}^n)^*(\delta_x) - \pi_1^\# R^n_{x,y}\right) \otimes \left((\mathcal{L}^n)^*(\delta_y) - \pi_2^\# R^n_{x,y}\right)}{1 - \int \mathbb{1} \, dR^n_{x,y}}.$$

(2) Suponha que x, y qualquer. Por top. mixing,



$\bar{x} \in B_r(z) : T^k \bar{x} = x$
$\bar{y} \in B_r(z) : T^k \bar{y} = y$

Define $$R^{n+k}_{x,y} := \sum_{T^n(\xi) = \bar{x}} \min e^{S_{n+k}\varphi \circ \tau^n_\xi(\bar{x})}, e^{S_{n+k}\varphi \circ \tau^n_\xi(\bar{y})} \; \delta_{\tau^n_\xi(\bar{x}), \tau^n_\xi(\bar{y})}$$

$\Rightarrow$ (1) $R^{n+k}_{x,y}$ é subacoplamento, $\exists c > 0$: $\int \mathbb{1} \, dR^{n+k}_{x,y} > c$

(2) $\int d(\xi, \eta) \, dR^{n+k}_{x,y} \leq \lambda^n d(x,y)^\alpha$.

③ A ideia agora é de usar os acoplamentos da forma indutiva:

Suponha que M é acoplamento de $(\mathcal{L}^n)^*(\delta_x), (\mathcal{L}^n)^*(\delta_y)$
e $B_k^n := \{(\xi,\eta) : \lambda^{k+1} < (d(\xi,\eta))^\alpha \leq \lambda^k\}$, $n \geq 0$.

Para $l \geq k$, define

$$dM^+ := dR^m_{\xi\eta}\, dM(\xi,\eta) + dQ^m_{\xi\eta}\, dM(\xi,\eta)$$

que é acoplamento de $(\mathcal{L}^{n+m})^*(\delta_x), (\mathcal{L}^{n+m})^*(\delta_y)$.

Além disso:

$$dM^+ = \sum_k \left(dR^m_{\xi\eta} + Q^m_{\xi\eta}\right) \mathbb{1}_{B_k^n}(\xi,\eta)\, dM(\xi,\eta).$$

Mas:

(i) $\operatorname{Supp}\left(R^m_{\xi\eta}\, \mathbb{1}_{B_k^n}(\xi,\eta)\, dM(\xi,\eta)\right) \subset \begin{cases} \bigcup_{i\geq 0} B^n_{k+m+i}, & k>0 \\ \bigcup_{i\geq 0} B_{l-k+m+i}, & k=0 \end{cases}$

(ii) $$\int R^m_{\xi\eta}(X^2)\cdot \mathbb{1}_{B_k^n}(\xi,\eta)\, dM(\xi,\eta) \geq \max\{c,\ 1-c\lambda^k\}$$

(iii) $\operatorname{Supp}\left(Q^n_{\xi\eta} \ —\right) \subset X^2$

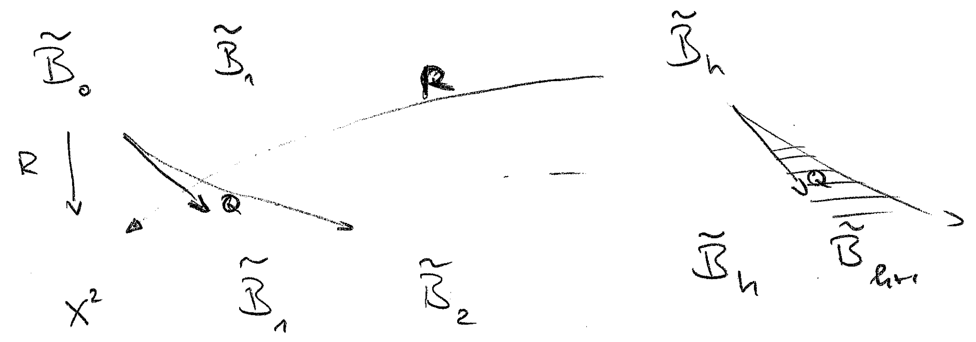
(iv) $$\int Q^m_{\xi\eta}\, \mathbb{1}_{B_l^n}(\xi,\eta)\, dM(\xi,\eta) \leq \min\{1-c,\ c\lambda^l\}.$$

Modificando a construção, podemos de fato supor que (..) são idênticas.

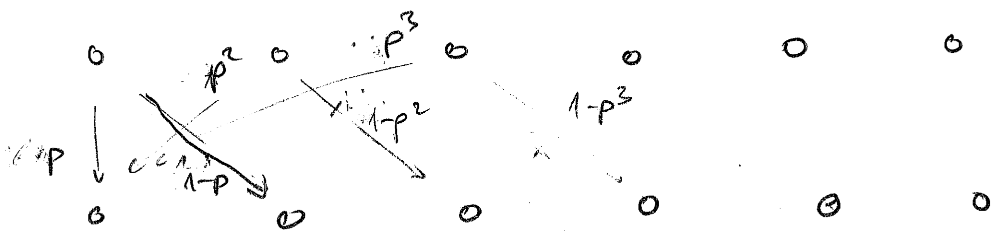
Escolhe l_0 tal que $c\lambda^{l_0} < \frac{1}{2}$, ~~e defina~~ $l_0 \geq k$ e $m = l_0$

$$\tilde{B}_0 = B_0, \quad \tilde{B}_h := \bigcup_{l=(h-1)l_0+1}^{h l_0} B_l$$

Então:

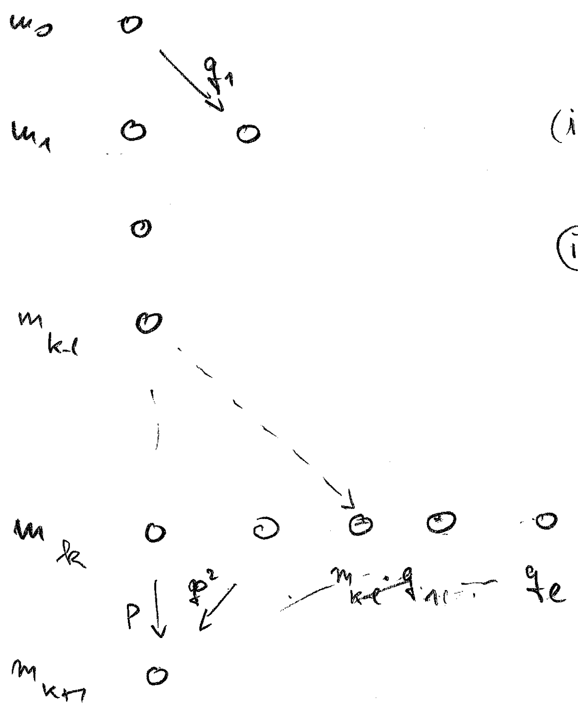


Ou seja, para obter a assintótica, temos que considerar um sistema do tipo, para $p \in (0,1)$:



$q_k := 1 - p^k$

Agora, usaremos um tipo de "Renewal equation":
Seja m_k a massa do vértice 0 a tempo k:



Ou seja: $(*)$

(i) $m_{k+1} = \sum_{l=0}^{k} m_{k-l}\, q_1 \cdots q_l \cdot p^{l+1}$

(ii) $\sum m_{k-l}\, q_1 \cdots q_l = 1$

Esgera: Funções geradoras

Define $m(t) := \sum_{n=0}^{\infty} m_n t^n$

$$g(t) := 1 - q_1 + \sum_{n=2}^{\infty} q_1 - q_{n+1} \underbrace{(1-q_{n+1})}_{= p^{n+1}} t^n$$

$(\dot{\ast}\dot{\ast})$
$\Rightarrow$ $t\,m(t)\,g(t) = m(t) - 1$

$\Rightarrow$ $m(t) = (1 - tg(t))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (tg(t))^n$

Basta analisar os coeficientes de $\sum_{n=0}^{\infty} (tg(t))^n$ para obter a assintótica. Aqui, há duas possibilidades:

① Calculo exato

② Aplicações de algebras de Banach

$\Rightarrow$ m_n tem decaimento exponencial.

$\Rightarrow$ Para x,y quaisquer, existem acoplamentos P_n e $\lambda < 1$

tal que, para m suff grande,

$$P_n(\{(q,q) : d(q,q) \geq \lambda^m\}) \leq C\lambda^{m+n}$$

O caso geral segue de superposição:

O caso geral, (i.e. $\mathcal{L}(\mathbb{1}) \neq \mathbb{1}$).

Dado $\mathcal{L}(h) = \lambda h$ para $h > 0$, $\lambda > 0$:

$$\tilde{\mathcal{L}}(f) := \frac{\mathcal{L}(f \cdot h)}{\lambda h} \quad \text{satisfaz}$$

① $\tilde{\mathcal{L}}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$

② $\tilde{\mathcal{L}}^n(f) = \dfrac{\mathcal{L}^n(f \cdot h)}{\lambda^n h}$.

Ou seja, o resultado segue após conjugação:

$$Lip(X) \longrightarrow Lip(X)$$
$$f \longmapsto f \cdot h$$

Para ver uma prova completa com este método:

- Cioletti - Hataishi - Lopes - S.

  Dixmier traces — Nonlinearity 23

- Para uma prova usando Cones:

  Liverani, Ann. of Math 1995, 1a parte.

- Primeira prova neste setting:

  Ruelle, CMP 1989

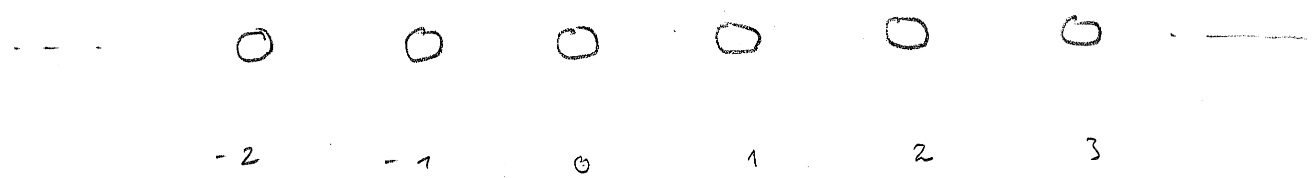
Espaços de Shift

Um espaço de shift é um subconjunto de $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (unilateral) ou $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, que é invariante sobre a aplicação de deslocamento, e fechado.

$\mathcal{A}$ é um espaço topológico, nomeadamente $\{1, \dots, n\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$ ...

Motivação na física: $\mathcal{A} := \{-1, 1\}$ ou $\mathbb{S}^n$

Ising Heisenberg



Interações $F_{i,j} : \mathcal{A}^2 \longrightarrow (0, \infty)$.

Então, a energia de uma "configuração" $\sigma \in \mathcal{A}$ é definida por

$$H(\sigma) = -\sum_{i,j} F_{i,j}(\sigma_i, \sigma_j)$$

Objetivo: Entender

$$\frac{e^{\beta H(\sigma)}}{\sum_{\sigma} e^{\beta H(\sigma)}} \quad \text{ou} \quad \frac{e^{\beta H(\sigma)}}{\int e^{\beta H(\sigma)}}$$

Método: Limite termodinâmico: define

$$X_n := \{(\sigma_{-n}, \dots, \sigma_n) : \sigma_i \in \mathcal{A}\}$$

$$H_n(\sigma) := -\sum_{-n \leq i,j \leq n} F_{ij}(\sigma_i, \sigma_j)$$

$$P_n(\sigma) = \frac{e^{\beta H_n(\sigma)}}{\sum_{\sigma \in X_n} e^{\beta H_n(\sigma)}} \xrightarrow[?]{n \to \infty} P(\sigma)$$

Relação com a dinâmica: Normalmente F_{ij} é invariante sob translações. Ou seja, pode-se considerar o limite como shift unilateral:

$$(\sigma_{-n} \text{ --- } \sigma_n) \longrightarrow (\sigma_0 \text{ --- } \sigma_{2n}) \xrightarrow{n\to\infty} \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

<u>Exemplos específicos</u>:

<u>Ising</u>: $F_{ij}(x,y) = \begin{cases} xy & : \ |i-j|=1 \\ 0 & : \ \text{else} \end{cases}$

<u>Heisenberg</u>: $F_{ij}(x,y) = \begin{cases} \langle x,y \rangle & : \ |i-j| = 1 \\ 0 & \end{cases}$

<u>Ising - Dyson</u>: $F_{i,j}(x,y) = |i-j|^{\alpha}\, xy$

<u>Hoje</u>: Substituir $\mathbb{Z}$ com grafos, reticulados, grupos ...
e obter limites $\beta \to \pm\infty$

Formalismo termodinâmico

Parte 1 : O princípio variacional.

Agora: $T: X \to X$ contínua, (X,d) métrico, X compacto

$\varphi : X \to \mathbb{R}$ cont.

$\varphi_n := \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ T^k$.

Def. geradora / separador.

Para (n, ε) define

$$B(x,n,\varepsilon) := \{ y \in X : d(T^i x, T^i y) < \varepsilon \quad \forall\, 0 \le i < n \}.$$

"bola dinâmica".

Seja $K \subset X$ compacto.

$E \subset X$ é (n,ε)-gerador se

$$K \subset \bigcup_{x \in E} B(x,n,\varepsilon)$$

$F \subset X$ é (n,ε)-separador se

$\forall x \in F$: ~~$x \notin \bigcup_{y \in F\setminus\{x\}} B(y,n,\varepsilon)$~~

$B(x,n,\varepsilon) \cap F = \{x\}$.

Agora:

$$G_n(T,\varphi,\varepsilon) := \inf \Big\{ \sum_{x \in E} e^{\varphi_n(x)} : E \ (n,\varepsilon) \text{ gerador} \Big\}$$

$$S_n(T,\varphi,\varepsilon) := \sup \Big\{ \ '' \ : F \ \text{separador} \Big\}$$

Além disso, define

$$G(T,\varphi) := \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log G_n(T,\varphi,\varepsilon)$$

$$S(T,\varphi) := \qquad\qquad S_n$$

Proposição: $G(T,\varphi) = S(T,\varphi)$.

Prova: Seja F (n,ε)-separado tal que é impossível de acrescentar mais um ponto. Então, para qualquer $x\in X$ existe $y\in F$: $B(y,n,\varepsilon)\cap B(x,n,\varepsilon)\neq\emptyset$.

$\Rightarrow$ F é $(n,2\varepsilon)$ gerador.

$\Rightarrow$ $\exists\, E\subset F$ que é $(n,2\varepsilon)$-gerador

$$\Longrightarrow \quad S\le G$$

Agora suponha que F é (n,ε)-sep. e E é $(n,\varepsilon/2)$-gerador. Então, para qualquer $x\in F$ existe $y(x)\in E$ tal que $x\in B(n,\varepsilon/2,y(x))$. Como F é separador, $x\mapsto y(x)$ é injetor (para uma escolha fixa $x\mapsto y$)

Pela continuidade uniforme de φ:

$$~~v(\varepsilon) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sup_{d}~~$$

$$v(\varepsilon) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{d_n(x,y)<\varepsilon/2} \frac{1}{n}\left|\varphi_n(x)-\varphi_n(y)\right| \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Daí:

$$\sum_{x\in F} e^{\varphi_n(x)} \le \sum_{y\in E} e^{\varphi_n(y)}\cdot e^{n v(\varepsilon)}$$

$$\Longrightarrow \quad G\le F \qquad\qquad \square$$

Def: $P(T,\varphi) := G(T,\varphi)$ é

a <u>pressão</u> de T em relação com φ.

Se $\varphi = 0$, $h_{top}(T) := P(T,0)$ é a

ENTROPIA TOP. de T.

Obs: Se $\varphi = 0$, então, para E gerador,

$$\sum_{x \in E} e^0 = \# E$$

Ou seja:

$$h_{top}(T) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \sup \{ \# E : E \text{ é } (n,\varepsilon) \text{ ger.} \}$$

Em casos expansoras "bons": $h_{top}(T) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \# T^{-n}(\{x\})$.

Def. $\varphi \longmapsto P(T,\varphi)$ é a função pressão.

Prop. ① se $\varphi \geq 0 \Rightarrow P(T,\varphi) \geq 0$

② $\varphi \longmapsto P(T,\varphi)$ é Lipschitz-contínua (em relação com a norma $\|\cdot\|_\infty$ em $C(\Omega)$.)

③ $P(T^n, \varphi_n) = P(T,\varphi)$.

Prova. Ex.

O princípio variacional

$\boxed{\varphi_n = S_n\varphi}$

Teorema: Seja X compacto e métrico, T contínua, $\varphi: X \to \mathbb{R}$. Então,

$$P(T,\varphi) = \sup\left\{ h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu : \mu = \mu\circ T^{-1} \right\}.$$

Prova. Seja μ prob. invariante.

$$(*) \quad \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^n) + \int \varphi \, d\mu = \frac{1}{n} \sum_{A\in\alpha_0^n} \left(-\mu(A)\log\mu(A) + \int_A \varphi_n \, d\mu \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{A\in\alpha_0^n} \mu(A) \log\left(\frac{1}{\mu(A)} e^{\frac{1}{\mu(A)}\int_A \varphi_n \, d\mu} \right)$$

$$\leq \frac{1}{n} \log \sum_A \mu(A)\cdot\left(\frac{1}{\mu(A)} \cdot e^{\frac{1}{\mu(A)}\int_A \varphi_n \, d\mu} \right) \quad \text{Jensen}$$

$$= \frac{1}{n} \log \sum_A e^{\frac{1}{\mu(A)}\cdot\int_A \varphi_n \, d\mu}$$

$$\leq \frac{1}{n} \log \sum_A e^{\sup_{x\in A} \varphi_n(x)}$$

Usando a continuidade uniforme: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 : |\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon \ \forall d(x,y)<\delta$.

Daí, para um conjunto (n,δ)-separado F_n máximo:

Se $\sup_{x\in A} S_n\varphi(x) = S_n(\varphi)(x_A)$, então existe $y_A \in F_n$ tal que

$d(x_A, y_A) < \delta \Rightarrow |S_n(x_A) - S_n(y_A)| \leq n\cdot\varepsilon$.

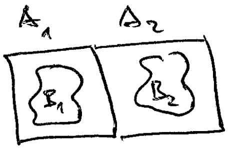
$$\Rightarrow \quad (*) \leq \frac{1}{n} \log \sum e^{S_n\varphi(y_A) + n\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{n} \log \sum_A e^{S_n\varphi(y_A)} + \varepsilon.$$

Basta controlar $\#\{x_A : x_A \mapsto y_A\}$ para $y \in S_n$.

Como μ é regular, existe, para qualquer $\varepsilon > 0$ e para qualquer $A \in \alpha$, $B \subset A$ compacto com $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$. Daí, existe $\beta = \{B_A : A \in \alpha\} \cup \{A_0\}$ tal que B_A compacto, $B_A \subset A$ e $\mu(A_0) < \varepsilon$. Além disso, $|\beta| < \infty$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1 :$ $d(x,y) > \delta_1$ $\forall$ x,y em B_{A_i} diferentes.



Daí, para β, tem-se que a aplicação $x_B \to y_B$ tem no máximo 2^n preimagens. Então, para β,

$$h_\mu(T, \beta) + \int \varphi \, d\mu \leq P(T, \varphi) + 2$$

$$\overset{\beta \text{ arb.}}{\Longrightarrow} \quad h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu \leq P(T, \varphi) + 2.$$

Substituindo T com T^n:

$$P(T^n, \varphi) + 2 \geq h_\mu(T^n) + \int \varphi_n \, d\mu = n\left(h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu\right)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{n} P(T^n, \varphi)}_{= P(T, \varphi)} + \frac{2}{n} \geq h_\mu(T) + \int \varphi \, d\mu$$

A volta é baseada na construção de uma medida:

Seja F_k (k, ε)-separado, e define

$$\mu_k := \frac{\sum_{x \in F_k} e^{S_k\varphi(x)} \delta_x}{\sum_{x \in F_k} e^{S_k(\varphi)(x)}}$$

$$\nu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu_k \circ T^{-j}.$$

Suponha que ν é um ponto de acumulação de (ν_n).

Além disso, suponha que

$$\log \sum_{x \in F_k} e^{\varphi_k(x)} \geq k\left(P(T, \varphi) - \eta\right),$$

onde $\eta > 0$ é dado. ... Para ver a prova:

Denker - Einführung in die Analysis dyn. Systeme $\square$

Aplicações do princípio variacional

(1) Existência de estados de equilíbrio

A existência de est. de eq. é relacionada à semicontinuidade da função pressão:

Teorema. Seja (X,d) compacto, $h_{top}(T) < \infty$ e T cont.
Então:

$\mu \to h_\mu(T)$ é semicont. superiormente (i.e. $\limsup_{\mu\to\nu} h_\mu(T) \leq h_\nu(T)$)

$\iff$ Para qualquer μ invariante,

$$h_\mu(T) = \inf\{P(T,f) - \int f\,d\mu : f \in C(X)\}.$$

$\left| M_T := \{\mu : \mu\circ T^{-1} = \mu, \mu(X)=1\}\right.$

Prova.

($\Uparrow$) Suponha que $\mu_n \to \mu$ na top. fraca. Então,

$$\begin{aligned} h_\mu(T) &= \inf\{P(T,f) - \int f\,d\mu : f \in C(X)\} \\ &\geq \limsup_n \inf\{P(T,f) - \int f\,d\mu_n : f \in C(X)\} \\ &= \limsup_n h_{\mu_n}(T) \end{aligned}$$

($\Downarrow$) Suponha que $\mu \mapsto h_\mu(T)$ é sup. semicont. Pelo princípio variacional, $P(T,f) \geq h_\mu(T) + \int f\,d\mu$.

$$\implies h_\mu(T) \leq P(T,f) - \int f\,d\mu.$$

Daí, basta mostrar "$\geq$": Suponha que $h > h_\mu(T)$,

$$C := \{(\nu,t) : \nu \text{ prob. invar. e } 0 \leq t \leq h_\nu(T)\}$$

Pela semicontinuidade superior, C é convexo e fechado. Além disso, pelo princípio variacional,

$$h_\nu(T) \leq h_{top}(T) < \infty$$

$\implies C$ compacto

Além disso, $(\mu, h) \notin C$. Daí, existe um aberto $\mathcal{U}$ t.q. $\mathcal{U} \cap C = \emptyset$ e $(\mu, h) \in \mathcal{U}$. Pela def da top. fraca, existem $f_1, \ldots, f_n \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ t.q.

$$\mathcal{U} \supset \left\{ (\nu, t) : \left| \int f_i \, d\mu - \int f_i \, d\nu \right| < \varepsilon \ \forall \ i = 1, \ldots, n \right.$$
$$\left. \text{e } |t - h| < \varepsilon \right\} =: \mathcal{U}_\varepsilon .$$

Define ~~$F(\nu,t)$~~ $F(\nu, t) := \left(t, \int f_i \, d\nu\right)_{i=1,\ldots,n}$.

Então, F é cont. e $F(C)$, $F(\mathcal{U}_\varepsilon)$ são convexos e disjuntos.

Ou seja, podemos separar $F(C)$, $F(\mathcal{U}_\varepsilon)$ por um hiperplano:

$\exists \ \lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \sup \left\{ \sum \lambda_i x_i : (x_i) \in F(C) \right\} & \leq & \inf \left\{ \sum \lambda_i x_i : (x_i) \in F(\mathcal{U}_{\varepsilon/2}) \right\} \\ \| & & \wedge \\ \sup \left\{ \lambda_0 t + \sum \lambda_i \int f_i \, d\nu \right\} & & \lambda_0 h + \sum \lambda_i \int f_i \, d\mu \end{array}$$

Note que $\lambda_0 \neq 0$. ~~Ou seja~~ Além disso, como $(h_\mu(T), \mu) \in C$, $\lambda_0 > 0$. Daí, dividindo por λ_0 e def. $f := \frac{1}{\lambda_0} \sum f_i$

$$h + \int f \, d\mu > \sup \left\{ h_\nu(T) + \int f \, d\nu : \nu \in M_T \right\}$$
$$\overset{\text{P.V.}}{=} P(T, f)$$

$$\Longrightarrow h > P(T, f) - \int f \, d\mu \qquad \square$$

<u>Corolário</u>. Se $\mu \mapsto h_\mu(T)$ é sup. semicont., então ~~qualquer ponto de acumulação de (μ_n), onde $h(\mu_n) \to P(T,f)$~~ ~~$\int f \, d\mu_n$~~ existe um estado de equilíbrio.

<u>Prova</u>. Seja (μ_n) seq. tal que $P(T, f) = \lim_n h_{\mu_n}(T) + \int f \, d\mu_n$.

Então, para qualquer ponto de acumulação μ,
$$P(T, f) \leq h(\mu) + \int f \, d\mu . \qquad \square$$

A fórmula de Bowen-McCluskey

$(s \geq 0)$

Proposição. Seja $f < 0$. Então, $s \mapsto P(T, sf)$ é estritamente decrescente. Em particular, $\exists!\ s_0 : P(T, s_0 f) = 0$.

Prova: Seja $s < t$. Então, pelo PV:

$$P(T, tf) = \sup_\mu \left\{ h_\mu(T) + t \int f \, d\mu \right\}$$

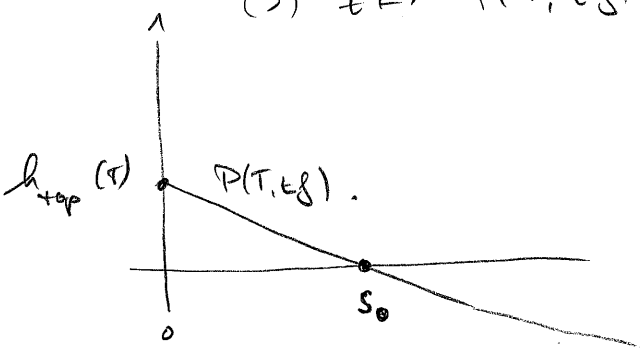
$$= \sup_\mu \left\{ h_\mu(T) + s \int f \, d\mu + \underbrace{(t-s) \int f \, d\mu}_{\leq (t-s) \sup f} \right\}$$

$$\leq P(T, sf) + (t-s) \sup(f).$$

Além disso, (1) $P(T, 0 \cdot f) = h_{top}(T) \geq 0$;

(2) Pelo estritamente, $\lim_{t \to \infty} P(T, tf) = -\infty$;

(3) $t \mapsto P(T, tf)$ é Lipschitz.



$\square$

Relevância da proposição:

- s_0 tipicamente é uma "dimensão".

Um exemplo:

Seja $X = \mathbb{C}$ e $T_a(z) = z^2 + a$.

① Caso 0:

Se $\|z\|$ $\begin{cases} < 1 \\ = 1 \\ > 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\lim_{n \to \infty} \|T_0^n(z)\| = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases}$

Define $X_0 := \{ z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1 \}$.

Neste caso: $T_0 : X_0 \longrightarrow X_0$ é um sistema dinâmico definido no espaço compacto X_0.

Além disso, $T_0'(z) = 2z \Longrightarrow T_0$ é uniformemente expanding (i.e., para $\|z - z'\| < \sqrt{2}$,

$$d(T(z), T(z')) = \| z^2 - \bar{z}^2 \| = \| z - \bar{z} \| \cdot \| z + \bar{z} \| \geq \| z - \bar{z} \| \cdot \sqrt{2}.$$

Além disso, $T^{-1}(\{e^{i\theta}\}) = \{ e^{i\frac{\theta}{2}}, -e^{i\frac{\theta}{2}} \}$.

$\Longrightarrow$ T é Ruelle expanding.

② Caso $a \neq 0$, a suf. pequeno:

① $\| T_a - T_0 \| = \|a\|$ pois $T_a(z) - T_0(z) = a$.

Daí: $T_a^{-1}(\{z\}) = T_0^{-1}(\{z - a\})$

$= \{ \sqrt{r} e^{i\theta/2}, -\sqrt{r} e^{i\theta/2} \} + a$ $\qquad z - a = r e^{i\theta}$

Conclusão: ① T_a tem ramos inversos bem definidos.

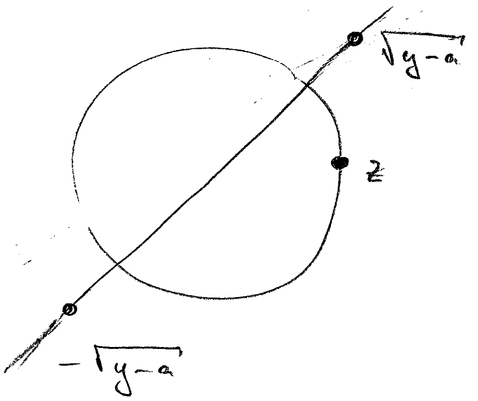
② ~~de fato~~ Se a é pequeno e ~~z está perto a~~ X_0, ~~então~~ z, X_0 são pertos, os ramos inversos são contrações estritas.

<u>Ou seja</u>: Se existe X_a compacto, $T_a(X_a) = X_a$, com X_a, X_0 pertos, então $T_a : X_a \to X_a$ é R-expanding.

<u>Def</u>: Seja $z \in X_0$ e $y \in \mathbb{C}$ e suponha que $T_a^{-1}(\{y\}) = \{z_1, z_2\}$. Define

$$\tau_z(y) := z_i \quad \text{onde} \quad i : d(z,z_i) < d(z, z_{i+1})$$

Note que $\tau_z(y)$ é bem def. se $\sqrt{y-a}$ e z não são ortogonais. Porém, para ter uma região dinâmica:



~~Suponha que $d(z, y)$ <~~

Seja $z \in X_0$ e $\bar{z} \in \mathbb{C}$. Então:

$$T_0 z - T_a(\bar{z}) = z^2 - \bar{z}^2 - a = (z-\bar{z})(z+\bar{z}) - a$$

$$\Rightarrow \|T_0 z - T_a(\bar{z})\| = \|z+\bar{z}\| \, \|z-\bar{z}\| \pm \|a\|.$$

$$\Rightarrow \|z - \bar{z}\| = \frac{\|T_0 z - T_a(\bar{z})\|}{\|z+\bar{z}\|} \pm \frac{\|a\|}{\|z+\bar{z}\|}.$$

<u>Ou seja</u>: $\exists\, r > 0$ tal que, para $\|a\| < r$, e $\|Tz - y\| < r$, então $\tau_z(y)$ é bem definida, e $\|\tau_z(y) - z\| < r$.

Daí, para $n \in \mathbb{N}$, $\|a\| < r$ e $\|T^n z - y\| < \varepsilon$,

$$\tau_x^n(y) := \tau_x \circ \tau_{Tx} \circ \tau_{T^{n-1}x}(y) \quad \text{é bem def.}$$

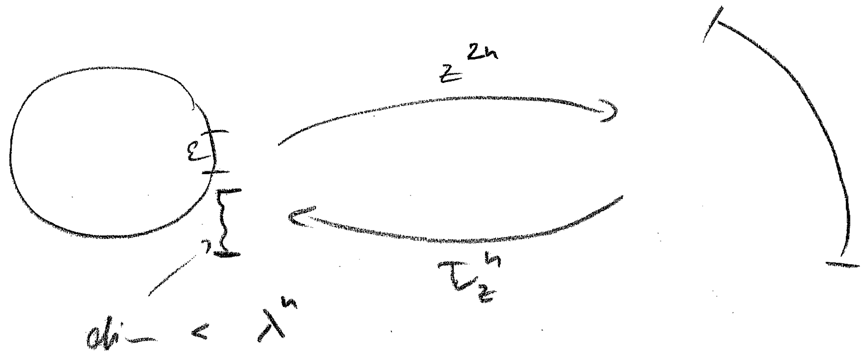
Lema: Seja qualquer $z \in X_0$, $\exists r>0$:

$$\lim_{n\to\infty} \tau_z^n(T^n z) = \Phi(z)$$

existe. Além disso, Φ é contínua.

Prova: Diminuindo $r>0$, podemos supor que T_a é unif. expansor em $\{z : \|z\| \in (1-r, 1+r)\}$. Depois, é fácil ver que $\left(\tau_z^n(T^n z)\right)$ é sequência de Cauchy.

Além disso, pela construção, Φ é cont.:



$\square$

Teorema. $T_a : \Phi_a(X_0) \to \Phi(X_0)$ é R-expanding.

Além disso $\Phi \circ T = T_a \Phi$.

Formalismo termodinâmico.

$$f := -\log \|T_a'(z)\|.$$

$\Longrightarrow$ Bowen-[illegible]: $\exists!\, \delta$: $P(T, \delta f) = 0$

Fato. $\dim_H(X_a) = \delta_a$.