Unicidade ergódica

Def: Seja $T: X \to X$ contínua, X compacto métrico. Então, (X,T) é unicamente ergódica se existir uma única medida de probabilidade invariante.

Obs: Como as medidas ergódicas são os pontos extremais:

unicamente ergódica $\Longrightarrow$ $\mu = \mu \circ T^{-1}$ é ergódica.

Os não-exemplos:

① $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $\sigma: X \to X$ shift. Então, qualquer medida de Bernoulli é ergódica.

② Suponha que μ, ν são medidas ergódicas de prob. invariantes tal que $\mu \ll \nu$. Então, $\mu = \nu$, (se T é invertível)

Prova. Como $\mu \ll \nu$, $h = \frac{d\mu}{d\nu}$ existe, e $h \in L^1(\mu)$.

Além disso, como μ, ν são invariantes:

$$\forall_A \; \mu(T^{-1}A) = \int \mathbb{1}_A \circ T \, d\mu = \int \mathbb{1}_A \circ T \cdot h \, d\nu = \int \mathbb{1}_A \cdot \hat{T}(h) \, d\nu$$
$$= \mu(A) = \int \mathbb{1}_A \cdot h \, d\nu \; \cancel{= \int \mathbb{1}_A \circ T \cdot h \circ T \, d\nu}$$

$\Longrightarrow \hat{T}h = h$ $\cancel{e \frac{1}{n}\sum \hat{T}^k h}$, ou $h = h \circ T^{-1}$, se T é invertível.

$\Longrightarrow$ h é constante. O caso geral segue da extensão natural.

Unicidade ergódica

Def: Seja X espaço métrico, $T : X \to X$ contínua. T é unicamente ergódica se $\# \{ \mu : \mu \circ T^{-1} = \mu, \mu(X) = 1 \} = 1$.

Exemplos: rotação sim, shift não.

Teorema: As seguintes condições são equivalentes:

1. T unicamente ergódica
2. Existe uma única medida ergódica e invariante
3. Para qualquer $f \in C(X)$, o limite
$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k(x) = C_f \qquad (*)$$
existe para qualquer x e só depende de f.
4. A convergência em $(*)$ é uniforme.

Prova:

$2 \Rightarrow 1$ Seja $\mu = \mu \circ T^{-1}$. Pela decomposição ergódica, existe $\{ \mu_P : P \in \mathcal{P} \}$ ergódicas e invariantes. Pela condição (2), ~~#P~~ $\mathcal{P}$ é trivial. Então, $\mu = \mu_P$, e μ é unicamente determinada.

$1 \Rightarrow 2$ Como as medidas ergódicas são os pontos extremais, ...

$1 \Rightarrow 3$ Qualquer ponto de acumulação de $\frac{1}{n} \sum \delta_{T^k x}$ é invariante.
Então, por (1), $\lim \int \frac{1}{n} \sum f \, d\delta_{T^k x} = \lim \frac{1}{n} \sum f \circ T^k x = \int f \, d\mu$
para qualquer $f \in C(X)$.

$3 \Rightarrow 1$ Pela convergência dominada e μ invariante ~~e ergódica~~,
$$\int f \, d\mu = \int \lim \frac{1}{n} \sum f \circ T^i \, d\mu = \cancel{\int f \, d\mu} = C_f .$$

$4 \Rightarrow 1$ Mesmo jeito.

1 ⇒ 4 Suponha que a convergência não é uniforme. Então, existe $g \in C(X)$, e $\varepsilon > 0$ tal que para cada $N \in \mathbb{N}$, existe $n > N$ e $x \in X$ tal que $\left| \frac{1}{n} \sum g \circ T^k(x) - C_g \right| > \varepsilon$. Seja $\mu_N := \frac{1}{n} \sum \delta_{T^k x}$, e ν um ponto de acumulação de $\{\mu_N : N \in \mathbb{N}\}$. Mas $\nu = \nu \circ T^{-1}$ e $\nu \neq \mu$, para μ dado por $\int g \, d\mu = C_g$ □

Ergódica, mas não unicamente ergódica implica que existe $g \in C(X)$ e $x \in X$ tal que $\frac{1}{n} \sum g \circ T^k x \not\to C_g$.

Exercícios 6.1.1, 6.1.2, 6.1.3 em Viana-Oliveira: Foundations of —

Definição. $\Lambda \subset X$ é MINIMAL se para qualquer $x \in \Lambda$, $\Lambda = \overline{\{f^n(x) : n \geq 0\}}$.

Proposição: T unicamente ergódica ⇒ $\operatorname{supp}(\mu)$ é ~~invariante~~ minimal.

Prova: Suponha o contrário. Então existe $x \in \operatorname{supp}(\mu)$, $\mathcal{U}$ aberto tal que

- $\operatorname{supp}(\mu) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$,
- $\{f^n(x)\} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.

Então, para qualquer ponto de acumulação ν de $(\frac{1}{n} \sum \delta_{T^k x})$, $\operatorname{supp} \nu \neq \operatorname{supp} \mu$. □

Topologia ⟷ Teoria da medida

(X,T) minimal $\Leftarrow$ / $\not\Rightarrow$ (X,T) unic. ergódica.

$\Downarrow$

top. transitivo $\left\{ \forall\, \mathcal{U}, V \text{ aberto } \exists n : T^{-n}\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset \right.$ $\Leftarrow$ / $\not\Rightarrow$ (X,T,μ) ergódica, $\mu(\mathcal{U}) > 0$ $\forall\, \mathcal{U}$ aberto.

Exemplos:

① Rotação do toro. $k \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ racionalmente independ.

Seja $f = e^{2\pi i \langle k, x\rangle}$. Então, se $k \neq 0$:

$$\frac{1}{n} \sum f \circ T^j = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i \langle k, x + j\alpha\rangle} = \frac{e^{2\pi i \langle k,x\rangle}}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i j \langle k, \alpha\rangle}$$

$$= \frac{e^{2\pi i \langle k,x\rangle}}{e^{2\pi i \langle k,\alpha\rangle} - 1} \cdot \frac{1}{n} \left(e^{2\pi i n \langle k,\alpha\rangle} - 1 \right)$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Então, pela teoria de Fourier + Teorema anterior: T é unicamente ergódica.

② O Odómetro: Seja $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $d((x_i),(y_i)) = 2^{-\min\{i \geq 0 :\, x_i \neq y_i\}}$

Então: $(x_i^{(n)})_n$ é Cauchy $\iff$ $\forall N > 0$ $\exists M > 0$ tal que $x_i^{(n)} = x_i^{(u)}$ $\forall n \geq M$, $i \leq N$.

Ou seja: X é compacto.

O MAPA:

Para $k \in \mathbb{N}$, define $0_k = \underbrace{0, \ldots 0}_{k}$, $1_k = \underbrace{1, \ldots 1}_{k}$

① Se $x = (0\, x_2 \ldots)$, $Tx = (1\, x_2 x_3 \ldots)$

② Se $x = (1_k 0\, x_{k+2} \ldots)$, $Tx = (0_k 1\, x_{k+2} \ldots)$

③ Se $x = (1, 1 \ldots)$, $Tx = (0, 0 \ldots$

Note que T é um homeomorfismo.

Vamos mostrar que T é unicamente ergódica:

Seja $x \in X$. Então, existem k, l, m tal que

$$T^k x = (0_l \, 1 \, x_{l+1} \dots)$$

$$\Rightarrow T^{k+2^l} x = T(1_{l+1} \, x_{l+1} \dots) = (0_{l+m} \, 1 \, x_{l+m+1})$$

Ou seja, por indução, podemos decompor a órbita da forma

$$\xrightarrow{\;k\;} \underset{0_{l_1}}{\overset{k=N_0}{\cdot}} \xrightarrow{\;2^{l_1}\;} \underset{0_{l_1+m_1}}{\overset{N_1}{\cdot}} \xrightarrow{\;2^{l_1+m_1} = 2^{l_2}\;} \underset{0_{l_2+m_2}}{\overset{N_2}{\cdot}} \xrightarrow{\;2^{l_3}\;} \cdots \underset{0_{l_j+m_j}}{\cdot},$$

onde os l_i são estritamente crescentes.

Agora, suponha que f é contínua. Pela compacidade, f é uniformemente contínua. Daí, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists M > 0$ tal que

$$|f((x_i)) - f((y_i))| < \varepsilon \quad \forall \, (x_i), (y_i) \text{ com } x_i = y_i \;\; \forall \, i \leq M.$$

Em particular, se $l_1 = M$:

$$\sum_{i = \underbrace{k+2^{l_1}+\dots+2^{l_j}}_{=N_j}}^{k+\dots+2^{l_{j+1}}-1 \,=\, N_{j+1}-1} f \circ T^i = \underbrace{\left(\sum_{i=k}^{k+2^{l_1}-1} f \circ T^i x \right)}_{F} 2^{l_{j+1}} \cdot 2^{-l_1} \pm \varepsilon \cdot 2^{l_{j+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N_{j+1}} \sum_{i=0}^{N_{j+1}-1} f \circ T^i x = \underbrace{\frac{1}{N_{j+1}} \sum_{i=0}^{N_1 - 1} f \circ T^i}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{N_{j+1}} \left(\sum_{i=0}^{j} F \cdot 2^{l_{i+1} - l_1} \pm \varepsilon 2^{l_{i+1}} \right)}_{\xrightarrow{j \to \infty} 2^{-l_1} F \pm \varepsilon.}$$

Daí, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, existe F tal que, para qualquer

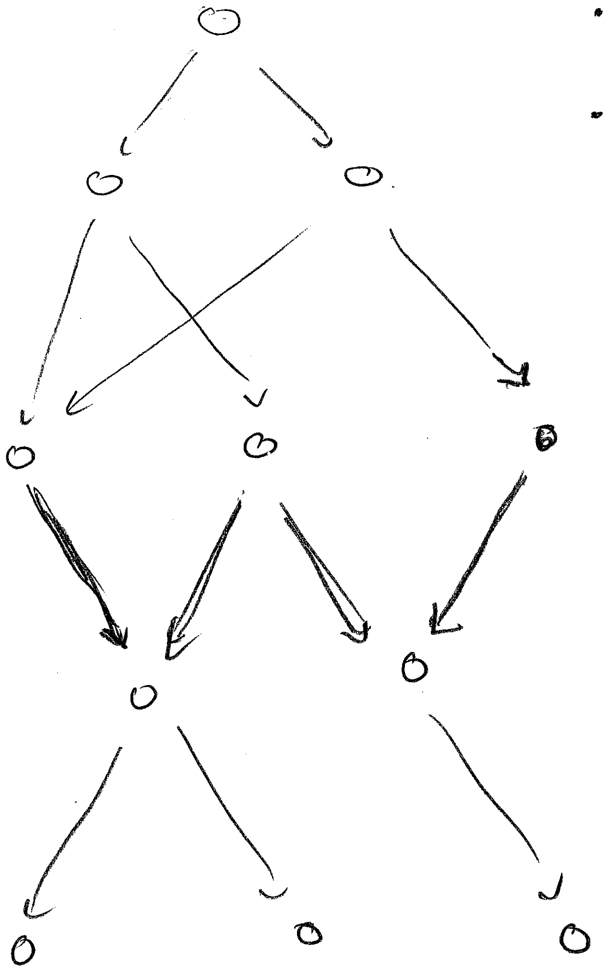
$x \in X$, existe $N_j \nearrow \infty$ tal que

$$\frac{1}{N_j}\sum_{i=0}^{N_j-1} f\circ T^i(x) \longrightarrow F.$$

Como F <u>não</u> depende de x, o teorema ergódico implica que somente existe <u>uma</u> medida invariante.

(ou seja, $\int f \, d\mu = F$).

<u>Generalizações do odômetro:</u>



- X: caminhos infinitos
- Ordem total dada por uma ordem das arestas chegando a um vértice
- Em vez do jogo 2°, usa-se o teorema de Perron-Frobenius para subdividir as órbitas.

<u>Teorema (Vershik)</u>: Qualquer automorfismo ergódico é conjugado a uma aplicação ádica (que é un. ergódica)

A medida de Haar

Um grupo topológico é um grupo munido com uma topologia tal que

$$(g,h) \longmapsto gh \quad \text{e} \quad g \longmapsto g^{-1}$$

são contínuas.

Exemplos: • G discreto, topologia discreta.

• $\mathbb{T}^d$

• $GL(d,\mathbb{R})$ } grupos de Lie.

Teorema: Se G localmente compacto. Então, existe uma única medida μ tal que $\mu = \mu \circ g^{-1}$ $\forall g \in G$. (módulo multiplicação com constantes). Se G é compacto, então $\mu(G) < \infty$.

Prova: Ver.. Bogachev Vol 2, p. 303

$\square$

Teorema: Seja G compacto e metrizável e $\tau_g(x) := gx$.

Então, são equivalentes:

(1) τ_g é unicamente ergódica

(2) τ_g é ergódica em relação com a medida de Haar

(3) $\overline{\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}} = G$

(4) G é abeliano, e $\chi(g) \neq 1$ para $\chi : G \to S^1$ homomorfismo.

Prova..

(2) $\Rightarrow$ (3) $H := \overline{\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}}$. Se $G \neq H$, ~~...~~

e d é uma métrica bi-invariante, então ver depois

$$f(x) := \min\{d(x,y) : y \in H\}$$

é uma função τ_g-invariante e cont. $\Rightarrow f$ constante $\Rightarrow G = H$.

$\operatorname{Supp}(\text{Haar}) = G$

3 ⇒ 1 : Seja $G = H$ e $\mu = \mu \circ \tau_{g^{-1}}$. Para f contínua, $\varepsilon > 0$ e $h \in G$, existe g^n tal que $|f(g^n x) - f(hx)| < \varepsilon \ \forall x \in G$.

Daí,
$$\left| \int f(hx) - f(x) \, d\mu \right| \le \underbrace{\left| \int f(hx) - f(g^n x) \, d\mu \right|}_{< \varepsilon} + \underbrace{\left| \int f(g^n x) - f(x) \, d\mu \right|}_{= 0}$$

$\Rightarrow \mu \circ h^{-1} = \mu \Rightarrow \mu$ Haar □

2 ⇒ 4 : Segue do 3 que G é abeliano. Para $\chi : G \to S^1$, $\chi(g) = 1$, tem-se que
$$\chi(\tau_g x) = \chi(g) \cdot \chi(x) = \chi(x).$$
$\overset{\text{erg.}}{\Rightarrow} \chi = 1.$

4 ⇒ 2 : Fourier-Series para grupos abelianos □

Basta provar que uma tal métrica existe: Seja (U_n) uma base de vizinhanças do elemento 1. Seja $\varphi_n : G \to [0,1]$ tal que $\varphi_n(1) = 0$ e $\varphi|_{U_n^c} = 1$, e
$$\varphi : G \to [0,1], \ z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \varphi_n(z).$$
$$d(x,y) = \sup\{ |\varphi(gxh) - \varphi(gyh)| : g,h \in G \}.$$

Para lembrar:

τ_g unicamente ergódico em relação com a med. de Haar
$\Downarrow \quad \Uparrow (\chi_g \neq 1$ para $\chi : G \to S^1)$
G abeliano

Sistemas misturadores

Pelo teorema de Von Neumann, para $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ergódico,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ T^k \xrightarrow{L^2} \int f\,d\mu . \qquad (*)$$

Observação. A aplicação à $\mathbb{1}_A$ com $T^{-1}A = A$ mostra que $(*)$ é equivalente a ergodicidade.

Daí, por continuidade,

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum \langle f\circ T^k, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_k \int f\circ T^k\cdot g\,d\mu$$

$$= \int\int f\,d\mu\, g\,d\mu = \int f\,d\mu \int g\,d\mu.$$

Ou seja para funções caracteristicas:

Proposição. (T,μ) ergódica $\iff \lim \frac{1}{n}\sum \mu(T^{-n}A\cap B) = \mu(A)\mu(B)$
$\forall A, B$ mensurável.

Prova: Exercício.

Definição: Seja $\mu = \mu\circ T^{-1}$. Então, o sistema é ~~mix~~ (strongly) mixing (ou (fortemente) misturador) se

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A\cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B) \;\forall\; A,B \text{ mensurável}.$$

O sistema é k-fold mixing (misturador de ordem k) se

$$\lim_{\forall e:\, n_e - n_{e-1}\to\infty} \mu(A_0\cap T^{-n_1}A_1\cap \dots T^{-n_k}A_k) = \prod_{i=0}^{k}\mu(A_i).$$

O sistema é fracamente misturador se

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|\mu(A\cap T^{-k}B) - \mu(A)\mu(B)| = 0$$

Obs: Tem também "mildly mixing".

Exemplos:

① Rotação: ergódica, mas não fracamente misturador

② Shift + Bernoulli: Mixing, pelo lei 0-1 de Kolmogorov

Um pouco de teoria espectral:

- $U_T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$, $f \mapsto f \circ T$
- U_T é uma isometria. Daí, qualquer ~~valor proprio~~ autovalor λ (i.e.: $\exists f$: $U_T f = \lambda f$) é em S^1. ~~Por ergodicidade, λ é o único autovalor~~.
- Por ergodicidade, $\lambda = 1$ é autovalor, e as autofunções são constantes
- Diz-se que T tem espectro contínuo se 1 é o único autovalor (ou seja, além de 1, o espectro é contínuo)

Obs: Operadores normais em esp. de Hilbert não possuem um espectro residual.

- Diz-se que $J \subset \mathbb{N}$ tem densidade ~~positiva~~ se

$$d(J) = \lim \frac{1}{n} \#\{j \in J : 1 \le j \le n\} \text{ existe.}$$

Se $d(J) > 0$, então J tem densidade positiva

Teorema: $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ com $\mu = \mu \circ T^{-1}$, $\mu(X) = 1$. São equivalentes:

(1) T fracam. misturador

(2) $T \times T$ é ergódica em relação com $\mu \times \mu$.

(3) " frac. misturador "

(4) Para qualquer $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ ergódica, $\nu = \nu \circ T^{-1}$, $\nu(X) = 1$, $T \times S$ é ergódica

(5) U_T tem espectro contínuo.

(6) Para A, B existe J com $d(J) = 0$ tal que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \notin J}} \mu(T^{-n} A \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

(7) Para A, B,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum |\mu(A \cap T^{-n} B) - \mu(A)\mu(B)|^2 = 0.$$

O teorema tem várias aplicações:

- Produtos de sistemas frac. misturadores são frac. misturador

(Prova: S, T frac. mist., $U_{T\times S}(f,g) = \lambda(f,g) \Rightarrow U_T(f) = \lambda f$ e $U_T(g) = \lambda g$. $\Rightarrow \lambda = 1$).

- T fracamente mist. $\Rightarrow T^n$ frac. misturador.

~~Contraexemplo.~~

Prova do teorema:

Lema: Seja (a_n) uma sequência não-negativa e limitada. Então, são equivalentes:

① $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum a_k = 0$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum a_k^2 = 0$

③ Existe $J \subset \mathbb{N}$ com $d(J) = 0$ tal que $\lim\limits_{\substack{n \notin J \\ n\to\infty}} a_n = 0$.

Prova:

$(1 \Rightarrow 3)$ Seja $J_k := \{ j : a_j > \frac{1}{k} \}$. Então, (J_k) é crescente e

$$\frac{1}{n}\left(|J_k \cap [0,n]| \right) < \frac{1}{n}\left(k \sum_{k=0}^{n} a_k\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Daí, é possível de escolher (ℓ_k) tal que

$$J = \bigcup_{k=} J_k \cap [\ell_k, \ell_{k+1})$$

tem densidade nula. Pelo mesmo argumento, para $\Delta_k := \ell_{k+1} - \ell_k$

$$\# \bigcup_{k=1}^{k} \left(J_k \cap (\ell_k, \ell_{k+1}]\right) \le \sum_{k=1}^{k} k \sum_{i=\ell_k+1}^{\ell_{k+1}} a_k \le \sum_{k=1}^{k} \Delta_k \cdot \underbrace{\frac{k \sum -}{\Delta_k}}_{\varepsilon_k}$$

Basta escolher (ℓ_k) tal que $\varepsilon_k \to 0$.

Obviamente $a_n \to 0$ para $n \notin J$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Seja $R := \sup a_n$ e, para $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ tal que

- $a_n < \varepsilon \quad \forall\, n > N,\ n \notin J$.
- $\frac{1}{n} | J \cap [0, n) | < \varepsilon \quad \forall\, n > N$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} a_j = \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{N-1} a_i}_{\le R\cdot N} + \underbrace{\sum_{j=N,\, j\notin J}^{n} a_j}_{\le n\varepsilon} + \underbrace{\sum_{j\in J}^{n} a_j}_{\le R\cdot n\cdot \varepsilon} \right)$$

$$\le \frac{RN}{n} + \varepsilon + R\varepsilon \xrightarrow{n\to\infty} (R+1)\varepsilon.$$

$(2 \Leftrightarrow 3)$ óbvio por $1 \Leftrightarrow 3$ $\square$

Prova do teorema

Pelo Lema: $1 \Leftrightarrow 6 \Leftrightarrow 7$.

$(6 \Rightarrow 3)$ ~~Para~~ A_i, B_i e J_i dado por (6)

$$\mu\times\mu\big((A_1\times A_2)\cap(T^{-n}A_1\cap T^{-n}A_2)\big) - \mu\times\mu(A_1\times A_2)\,\mu(B_1\times B_2)$$

$$= \mu(A_1\cap T^{-n}B_1)\,\mu(A_2\cap T^{-n}B_2) - \dots \xrightarrow[n\in J_1\cup J_2]{} 0.$$

Como os retângulos geram $\sigma(\mathcal{B}\otimes\mathcal{B})$, $T\times T$ é fracamente mist.

$(3\Rightarrow 1)$ Óbvio: considere $A\times X$, $B\times X$.

$(1\Rightarrow 4)$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\mu\times\nu)\big(A_1\times A_2\cap(T^{-k}B_1\times S^{-k}B_2)\big)$$

$$= \frac{1}{n}\sum \mu(A_1\cap T^{-k}B_1)\,\nu(A_2\cap S^{-k}B_2)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}\sum \mu(A_1)\mu(B_1)\cdot\nu(A_2\cap S^{-k}B_2)}_{\to\ \mu(A_1)\mu(B_1)\cdot\nu(A_2)\nu(B_2)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{n}\sum\big(\mu(A_1\cap T^{-k}B_1) - \mu(A_1)\mu(B_1)\big)\cdot\nu(A_2\cap S^{-k}B_2)}_{\to\ 0,\ \text{por weak mixing}}.$$

$(4\Rightarrow 2)$ Óbvio

$(2\Rightarrow 7)$ Basta mostrar que $\frac{1}{n}\sum_{n=0}^{k-1}\big(\mu(A\cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)\big)^2 \to 0$

Por 2:

$$\frac{1}{n}\sum\big(\mu(A\cap T^{-n}B)^2 - \mu(A)^2\mu(B)^2\big) \to 0$$

$$\frac{1}{n}\sum \mu(A\cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B) \to 0$$

$\Rightarrow$ fórmula binomial.

$(2\Rightarrow 5)$ Seja f com $f\circ T = \lambda f$. Defina $g(x,y) = f(x)\overline{f(y)}$.

$$\Rightarrow g(Tx,Ty) = (f\circ Tx)(\overline{g\circ Tx}) = |\lambda|^2\cdot f(x)\cdot g(x)$$

Por ergodicidade, $g=\text{const} \Rightarrow f=\text{const}$ ∎

Prova (5) $\Rightarrow$ (2) (A parte difícil.)

Vamos provar que $T\times T$ não ergódico $\Rightarrow$ $\exists$ f não constante e λ tal que $U_T(f) = \lambda f$ ($\Leftrightarrow$ U_T não tem espectro contínuo).

Se $T\times T$ não é ergódica, existe uma função $g : X^2 \to \mathbb{R}$ invariante e limitada.

De fato, s.p.d.g, $\int g(x,y)\, d\mu\, d\mu = 0$.

Seja $\Phi : h \longmapsto \int g(\cdot, y)\, h(y)\, d\mu(y)$

$\overset{AF}{\Longrightarrow}$ Φ é operador compacto e autoadjunto em $L^2(\mu)$.

Além disso, $\Phi(\text{const}) = 0$.

Pelo teorema espectral, existe $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que

$$0 < \dim \underbrace{\{ h : \phi h = \lambda h \}}_{=: V_\lambda} < \infty .$$

Além disso, $\phi \circ U_T = U_T \circ \phi$:

$$\phi(h\circ T) = \int g(x,y)\, h\circ T\, d\mu = \int g(T(\cdot), Ty)\, h(Ty)\, d\mu$$

$$= \int g(T(\cdot), y)\, h(y)\, d\mu = \phi(h)\circ T .$$

Daí, $U_T : V_\lambda \to V_\lambda$. ~~Como~~ $\dim V_\lambda < \infty$, $\exists\ \tilde\lambda \in S^1$ ~~tal~~ e $h_{\tilde\lambda}$ tal que $U_T(h_{\tilde\lambda}) = \tilde\lambda h_{\tilde\lambda}$. Como $h_{\tilde\lambda} \notin \ker(\Phi)$, $h_{\tilde\lambda}$ não é constante $\square$

Exemplo 1: Rotação do círculo / Toro :

Seja $f(x) := e^{2\pi i \langle k, x\rangle}$, para $k \in \mathbb{Z}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Para $\alpha \in \mathbb{R}^d$, seja $T(e^{2\pi i x_1} \_\ e^{2\pi i x_2}) = (e^{2\pi i (x_1+\alpha_1)} \_\_)$

$$\Rightarrow \quad f\circ T(x) = e^{2\pi i \langle k, x+\alpha\rangle}$$

$$= e^{2\pi i \langle k,\alpha\rangle}\cdot f(x).$$

$\Rightarrow$ T não é weak mixing.

Por exemplo, se $T = T_\alpha$ é ergódica, o teorema diz que $T_\alpha \times T_\alpha$ não é ergódico. Especificamente, deve existir uma função $T_\alpha \times T_\alpha$ invariante. No caso da rotação é simples.

Defina $f(x_1, x_2) := e^{2\pi i (\langle k, x_1 - x_2 \rangle)}$. Então

$$f(T_\alpha \times T_\alpha (x_1, x_2)) = e^{2\pi i \langle k, x_1 + \alpha - x_2 - \alpha \rangle} = f(x_1, x_2).$$

De fato, qualquer função da forma $f(x_1, x_2) = \frac{g(x_1)}{g(x_2)}$ funciona.

O exemplo de Chacon (Proceedings AMS 1969)

Observação: Contendo para o teorema de **Chacon – Ornstein**.

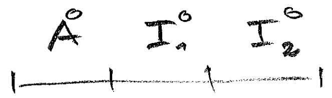
Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ conservativo. Então, para $g \in \mathcal{L}^1 > 0$ e $f \in \mathcal{L}^1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum \hat{T}^k(f)}{\sum \hat{T}^k(g)} \longrightarrow h \quad \text{q.t.p. e} \in \mathcal{L}^1.$$

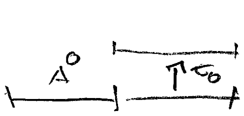
De volta ao exemplo:

A construção do exemplo usa "cutting & stacking".

Passo 0:

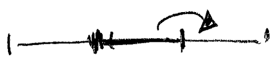


"cutting"

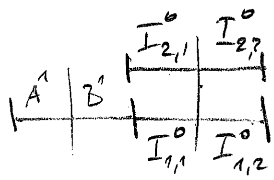


"stacking"

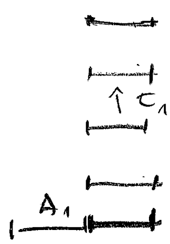
Ou seja:



Passo 1:



"cutting"



$B^1 =: I^1_5$

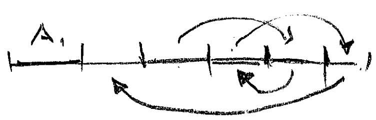
$I^0_{2,2}$

$I^0_{1,2}$

$I^0_{2,1} =: I^1_2$

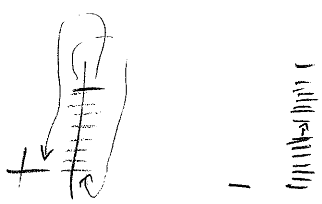
$I^0_{1,1} =: I^1_1$

Ou seja

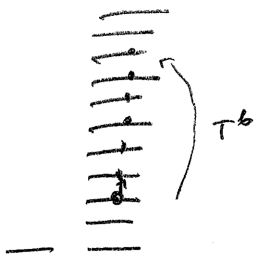


τ_1

Passo n: Do mesmo jeito.



Vantagem:



(1) τ_n é definido em $[\frac{1}{3} 2^{-n}, 1]$

(2) $\tau_n \big|_{[\frac{1}{3} 2^{-n+1}, 1]} = \tau_{n-1}$

$\Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \tau_n = T$ existe q.t.p.

(3) Além disso, usando (1),(2): a órbita de um ponto é obtida em "subir" em uma das torres.

(4) **Obs.** O torre em passo n tem altura

$$p(n) = 3 \cdot 2^n - 1 = 2p(n-1) + 1$$

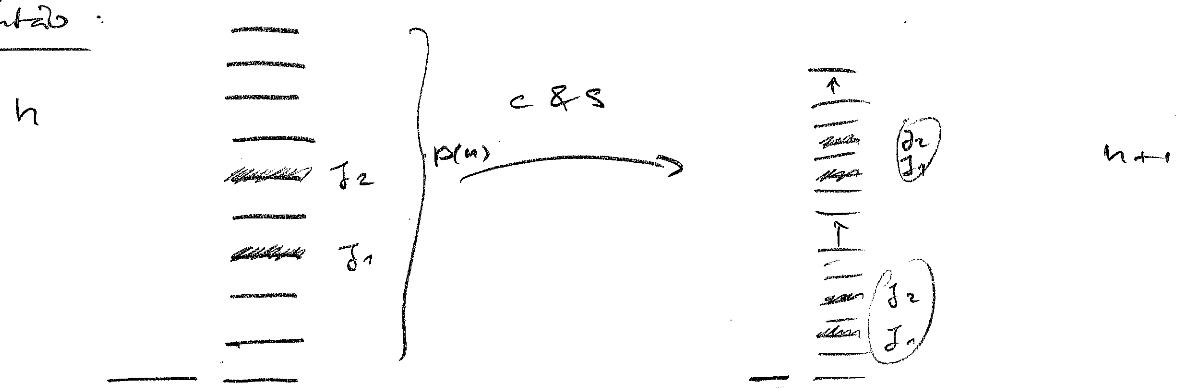
(5) A aplicação preserva a medida de Lebesgue, e é invertível.

Teorema. T é weak mixing mas não é (fortemente) mixing.

Prova. Seja A conjunto mensurável com $\mu(A) > 0$ e $\varepsilon > 0$. Então, existe n, m e intervalos $J_1, \ldots, J_m$ disjuntos em $\{ I_k^n : 1 \le k \le p(n) \}$ tal que

$$\text{Leb}\left(A \,\Delta\, \bigcup_{i=1}^m J_i \right) < \varepsilon.$$

Então:



$$\Longrightarrow \text{Leb}\left(T^{p(n)}(\cup J_i) \cap (\cup J_i) \right) \ge \frac{1}{2} \text{Leb}(\cup J_i)$$

Ou seja, para qualquer $\varepsilon > 0$ $\exists\ k \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\mu(A \cap T^k A) > \frac{1}{2}\mu(A) - \varepsilon \qquad (\mu = Leb)$$

Daí, se μ é mixing, $\mu(A)^2 \geq \frac{1}{2}\mu(A) \Rightarrow \mu(A) \geq \frac{1}{2}$.

Ou seja, μ não é mixing.

Vamos mostrar que μ é fracamente misturador.

ⓐ Suponha que $\lambda f = f \circ T$ e que $f|_{I_k^n} = \alpha = const. \neq 0$ para n, k.

Pelo mesmo argumento (ou seja $T^{p(n)}(I_k^n) \cap I_k^n \neq \emptyset$):

$$\lambda^{p(n)} \alpha = \alpha \Rightarrow \lambda^{p(n)} = 1$$

Porém, como n é arbitrário:

$$1 = \lambda^{p(n+1)} = \lambda^{2p(n)+1} = (\lambda^{p(n)})^2 \cdot \lambda = \lambda.$$

ⓑ Suponha que $\lambda f = f \circ T$ para f mensurável e $f : X \to \mathbb{C}$

podemos aproximar f com funções $\bigvee_k \{I_k^n\}$-mensuráveis:

Existem $f_n : I \to \mathbb{R}$, mensuráveis em relação ao $\bigvee_k \{I_k^n\}$

tal que $f_n \to f$ q.t.p.

Egorov: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ \Omega$, $\mu(\Omega) > 1 - \varepsilon$ tal que $f_n \to f$ unif.

$\Longrightarrow \exists\ n :$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall\ x \in \Omega$.

casa dos $\Longrightarrow$ pombos $\exists\ k :$ $\mu(I_k^n \cap \Omega) > (1-\varepsilon)\,\mu(I_k^n)$

Pelo mesmo argumento do anterior; para $f_n|_{I_k^n} = \alpha$, $\alpha \neq 0$:

$\| \alpha - \lambda^{p(n)} \alpha \| < 2\varepsilon$, $\quad \| \alpha - \lambda^{2 \cdot p(n)+1} \alpha \| < 2\varepsilon$.

Ou seja, existe δ_1, δ_2 com $\|\delta_i\| < \frac{2\varepsilon}{\|\alpha\|}$ tal que

$$\lambda^{p(n)} = 1 + \delta_1 \, , \qquad \lambda^{2p(n)+1} = 1 + \delta_2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \, (1 + \delta_1)^2 = 1 + \delta_2$$

Como pode-se supor que $\|\alpha\| \geq 1$ (em divisão na constante),

$\lambda = 1$, num conjunto de medida positiva. $\square$

Equivalência espectral

<u>Def.</u> (X,T,μ) é <u>fator</u> de (Y,S,ν) se existe $\pi: X \to Y$ sobrejetor tal que

(1) $\pi \circ T = S \circ \pi$ (2) $\mu = \nu \circ \pi^{-1}$

(X,T,μ) e (Y,S,ν) ~~são~~ <u>equivalentes</u> se ambos são fator de outro.

<u>Problema:</u> Este tipo de equivalência é um conceito que é flexível demais: por exemplo, cada automorfismo ergódico tem um modelo simbólico e minimal ergódico. Ou seja, a equivalência não é sensível em relação com propriedades mais 'finas'.

Porém, a <u>noção de fator</u> é um objeto importante:

(1) Seja (X,T,μ) um sistema dinâmico e μ uma medida σ-finita e invariante.

Seja $Y := \{(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0) : x_i \in X,\ T x_{i+1} = x_i \quad \forall i \geq 0\}$,

$S: Y \to Y$, $(\ldots, x_{-1}, x_0) \mapsto (\ldots x_{-1}, x_0, T x_0)$.

~~Fato~~ : S é inversível, $\pi((\ldots, x_0)) = x_0$ satisfaz $\pi S = T\pi$.

Para construir a medida, suponha que $T(A)$ é mensurável para qualquer A mensurável.

Define $\nu(\{(\ldots, x_{-1}, x_0) : x_n \in A\}) := \mu(A)$. Para mostrar que ν é bem definida, precisa-se de verificar a 'consistência de Kolmogorov' ~~na versão~~ de Tulcea:

Define $[A]_n := \{(\ldots, x_0) : x_n \in A\}$. Então, $[A]_n = [T^{-1}A]_{n+1}$. Daí, basta ~~mostrar~~ verificar que

$\mu(A) = \nu([A_n]) = \nu([T^{-1}A]_{n+1}) = \mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.

$\Longrightarrow$ consistência para processos em <u>tempo</u> discreto.

<u>Def.</u> $(\overleftrightarrow{S}, \nu, Y)$ é a extensão natural de (X, μ, T), e T é fator de S.

② Interpretação alternativa de decomposição ergódica.

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ p.p. transformação, e $\mathcal{J} := \{A : \mu(A \Delta T^{-1}A) = 0\}$.
Se X é polonês, então existe um mapa sobrejetor

$$\pi : (X, \mathcal{B}) \longrightarrow (X, \mathcal{J}).$$

Define $\nu := \mu \circ \pi^{-1}$. Então, pela desintegração de medidas, existe uma família $\{\mu_\omega : \omega \in (X, \mathcal{J})\}$ de medidas tal que

$$\int \varphi \mu_\omega \, d\nu(\omega) = \varphi\mu.$$

Equivalência espectral

Em vez de pedir conjugação dos sistemas dinâmicos, pode-se pedir que os operadores de Koopman são conjugados. Neste caso, obviamente os espectros são iguais.

Porém, pelo teorema espectral para operadores normais, os operadores são conjugados $\Longleftrightarrow$ os espectros são iguais

Caso 1 O espectro discreto (Por def.: O espectro é conjunto discreto e existe decomposição em blocos de Jordan de dim finita).

Proposição. Seja (X, μ, T) p.p.t tal que U_T tem espectro discreto em $\mathcal{L}^2(\mu)$.
Então, os autovalores formam um subgrupo de S^1. Se T é ergódico, então $\dim(U_T - \lambda) = 1$ para qualquer autovalor λ. Além disso, os autoespaços são 2-2 ortogonais.

Prova. Se $f_i \circ T = \lambda_i f_i$, para $\lambda_i \in S^1$, $i=1,2$, então

(1) $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1 \circ T, f_2 \circ T \rangle = \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \langle f_1, f_2 \rangle$

$\Rightarrow \langle f_1, f_2 \rangle = 0$ ou $\lambda_1 \bar{\lambda}_2 = \lambda_1 \lambda_2^{-1} = 1$.

(2) $(f_1 \cdot f_2) \circ T = \lambda_1 f_1 \cdot \lambda_2 f_2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

(3) Se U_T é ergódico, $f_i \circ T = \lambda_i f_i$ implica que

$|f_i| \circ T = |\lambda_i| |f_i| = |f_i|$. Daí, por ergodicidade,

$|f_i| = \text{const.}$

Se $\lambda_1 = \lambda_2$, então $U_T(f_1/f_2) = f_1/f_2 = \text{const.}$

$\Longrightarrow \dim \{f : U_T f = \lambda f\} = 1$ $\square$

Conclusão: Se T é ergódica e U_T tem espectro discreto, então $L^2(\mu) \cong \bigoplus_{\lambda \in \sigma(U_T)} \ker U_T - \lambda$. Além disso, T, T^{-1} tem o mesmo espectro.

Prova. Pelo teorema espectral, espectro discreto $\Rightarrow$ espectro pontual. Basta aplicar a proposição. $\square$

Em particular, existe uma base de autovetores, além disso, espectro discreto $\Rightarrow$ T não é weak mixing

Caso 2. Espectro de Lebesgue

Def. Diz-se que a isometria $U : H \circlearrowleft$ tem espectro de Lebesgue se existe $E \subset H$ fechado t.q. E é subespaço e

(i) $U(E) \subset E$

(ii) $\bigcap_{n=1}^{\infty} U^n(E) = \{0\}$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} U^{-n}(E) = H$

Def. T tem espectro de Lebesgue se $U_T : \{f \in L^2(\mu) : \int f \, d\mu = 0\} \circlearrowleft$ tem espectro de Lebesgue.

Exemplo.

① Seja T exato (i.e. $\bigvee T^{-n}\mathcal{B}$ é trivial) e $E = \{ f \in \mathcal{L}^2, \int f d\mu = 0 \}$. Então, como $\int f\circ T \, d\mu = \int f d\mu$,

$U_T(E) \subset E = H$, por invariância de μ.

Se $f \in \bigcap U_T^n(E)$, então, para qualquer n, existe g_n t.q. $f = g_n \circ T^n$. Daí, para $A \subset f(X)$,

$$f^{-1}(A) = T^{-n}(g_n^{-1}A) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow f^{-1}(A) \in \bigvee T^{-n}\mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(A) \text{ é trivial.}$$

② $X = \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$, munido com a medida de Bernoulli, e

$$E := \left\{ f : X \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int f d\mu = 0 \text{ e } f(\ldots y_{-1}, x_0 \ldots) = f(\ldots x_{-1}, x_0 \ldots) \; \forall x, y \right\}$$

Ex: X tem espectro de Lebesgue.

Teorema. Se (X, μ, T) tem espectro de Lebesgue, então

$$\lim_{n\to\infty} \langle U_T^n f, g \rangle = 0 \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^2(\mu) \text{ com } \int f = \int g = 0.$$

Em particular, T é mixing.

Prova. $|\langle U_T^n f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ por CS. Daí, $(\langle U_T^n f, g\rangle)$ é limitada. Como U é isometria, a seq. $(U_T^n f)$ é limitada

$\overset{\text{B.-A.}}{\Longrightarrow} \exists (n_k) : U_T^{n_k}(f) \longrightarrow \hat{f}$ fracamente.

Em particular, se $f \in U_T^{-n}(E)$, então $U_T^{n_j - n}(f) \in U_T^{n_j - n}(E)$; para j suff. grande.

$\Rightarrow$ Como $U_T^n(E)$ são fechados, então

$$\hat{f} \in \bigcap_{j \text{ grande}} U^{n_j - n}(E).$$

Entropia e Informação

Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ tal que $\mu = \mu \circ T^{-1}$, $\mu(X) = 1$, X polonês.

Definição. Seja α partição enumerável e $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ sub-σ-álgebra.

$$I(\alpha \mid \mathcal{F}) := - \sum_{A \in \alpha} \mathbb{1}_A \log \mu(A \mid \mathcal{F})$$ INFORMAÇÃO COND.

$$H(\alpha \mid \mathcal{F}) := \int I(\alpha, \mathcal{F}) \, d\mu = - \sum_{A \in \alpha} \int_A \mu(A \mid \mathcal{F}) \, d\mu$$ ENTROPIA COND.

Onde: $\mu(\cdot \mid \mathcal{F})$ é a probabilidade condicional: Ou seja,

$\mu(\cdot \mid \mathcal{F}) : \mathcal{B} \times X \longrightarrow [0,1]$ satisfaz

1. $x \longmapsto \mu(A \mid \mathcal{F})(x)$ é $\mathcal{F}$-mensurável $\forall A \in \mathcal{B}$.
2. $\mu(\cdot \mid \mathcal{F})(x)$ é probabilidade.
3. $\int \mu(A \mid \mathcal{F}) \, d\mu = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$.

Obs. Se $\mathcal{F} = \{\emptyset, X\}$, $\mu(A \mid \mathcal{F}) = \mu(A)$, e

$I(\alpha) := I(\alpha \mid \mathcal{F})$ INFORMAÇÃO.

$H(\alpha) := H(\alpha \mid \mathcal{F})$ ENTROPIA.

Definição. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ partições. Então

$$\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i := \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} A_i : A_i \in \alpha_i \text{ para } i = 1, \dots, n \right\}$$

é o refinamento comum.

Objetivo. Analisar $H\left(\bigvee_{i=1}^{n} T^{-i} \alpha \right)$

Lema. Seja α, β, γ partições. Então:

1. $I(\alpha | \mathcal{F}) \geq 0$
2. $I(\alpha | \mathcal{F}) = 0 \iff \alpha$ é $\mathcal{F}$-mensurável
3. Se α é mais fino do que β (i.e. $\forall A \in \alpha\ \exists B \in \beta$ com $A \subset B$), então $I(\alpha | \mathcal{F}) \geq I(\beta | \mathcal{F})$
4. Se γ é mais fino do que β: $H(\alpha | \gamma) \leq H(\alpha | \beta)$
5. $I(\alpha \vee \beta | \gamma) = I(\alpha | \gamma) + I(\beta | \alpha \vee \gamma)$
6. $H(\alpha \vee \beta) = H(\alpha) + H(\beta) \iff \alpha, \beta$ indep.

Prova.

2. Se $I(\alpha | \mathcal{F}) = 0$, então $\mathbb{1}_A \log \mu(A | \mathcal{F}) = 0 \quad \forall A \in \alpha$.

$$\Rightarrow \log \mu(A | \mathcal{F}) = 0 \quad \forall x \in A.$$

Além disso: $\int_{A^c} \mu(A | \mathcal{F})\, d\mu = \int \mu(A | \mathcal{F})\, d\mu - \int_A \underbrace{\mu(A | \mathcal{F})}_{=1} d\mu$

$$= \mu(A) - \mu(A) = 0$$

$$\Rightarrow \mu(A | \mathcal{F}) = \mathbb{1}_A \quad (\text{daí, } A \in \mathcal{F}).$$

A outra direção é mais simples.

3. Jensen.

4. Seja $\varphi(z) = -z \log z$. Como γ é partição

$$\mu(A | \gamma) = \sum_{B \in \gamma} \mathbb{1}_B \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}, \text{ e}$$

$$H(\alpha | \gamma) = -\int \sum_{A \in \alpha, B \in \gamma} \mathbb{1}_B \mathbb{1}_A \log \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}\, d\mu$$

$$= \sum_A -\int \mathbb{1}_B \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)} \log \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}\, d\mu$$

$$= \sum_A -\int \varphi(\mu(A | \gamma))\, d\mu$$

$$= \sum_A -\int E(\varphi(\mu(A | \gamma)) | \beta)\, d\mu$$

$$\leq \sum_A -\int \varphi(E(\mu(A | \gamma) | \beta))\, d\mu \quad \text{Jensen}$$

$$= H(\alpha | \beta)$$

(5) Para $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in \gamma$ e $x \in A \cap B \cap C$:

$$I(\alpha|\gamma)(x) + I(\beta|\alpha\vee\gamma)(x) = -\log\frac{\mu(A\cap C)}{\mu(C)} - \log\frac{\mu(A\cap B\cap C)}{\mu(A\cap C)}$$

$$= -\log\frac{\mu(A\cap B\cap C)}{\mu(C)} = I(\alpha\vee\beta|\gamma)(x).$$

(6) a) $I(\alpha\vee\beta) = I(\alpha) + I(\beta|\alpha)$, usando (5)

Além disso, por independência:

$$-I(\beta|\alpha) = \sum_{A,B} \mathbb{1}_{A\cap B} \log \underbrace{\frac{\mu(B\cap A)}{\mu(A)}}_{=\mu(B)} = \sum_{A,B} \mathbb{1}_{A\cap B} \log \mu(B)$$

$$= -I(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad I(\alpha\vee\beta) = I(\alpha) + I(\beta)$$

b) $0 = H(\alpha) + H(\beta) - H(\alpha\vee\beta)$

$$\overset{(5)}{=} H(\beta) - H(\beta|\alpha) = -\sum \mu(B)\log\mu(B) + \sum\mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)}$$

$$= \sum \mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A\cap B)}{\mu(A)\mu(B)}$$

$$= -\sum \mu(A\cap B)\log\frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(A\cap B)}$$

$$\overset{\text{Jensen}}{\geq} -\log\sum_{A,B}\mu(A\cap B)\cdot\frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(A\cap B)} = 0$$

Além disso, aqui temos uma identidade $\Leftrightarrow$ $\log\frac{\mu(A)\mu(B)}{\mu(A\cap B)} = 0$. $\square$

Def. Uma sequência (f_n) de funções é uniformemente integrável se $\sup \|f_n\|_1 < \infty$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que

$$\mu(E) < \delta \Rightarrow \int_E |f_n|\, d\mu < \varepsilon.$$

Teoremas associados

(1) $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0 \iff (f_n)$ é uniformemente integrável e $\mu(\{x : |f_n - f| > \varepsilon\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \;\; \forall \varepsilon > 0$

(2) Dunford-Pettis: (f_n) unif. integrável $\iff$ (f_n) fracamente rel. compacto

Lemma: Suponha que α é partição ~~finita~~ com entropia finita e $\mathcal{F}_n \uparrow \mathcal{F}$.

Então,
$$\lim_{k\to\infty} \sup_n \int_{\{x:\, I(\alpha|\mathcal{F}_n)(x) > k\}} I(\alpha|\mathcal{F}_n)\, d\mu = 0$$

Além disso, $\int \sup I(\alpha|\mathcal{F}_n)\, d\mu \le H(\alpha) + 1$.

Prova. Seja $f := \sup_n I(\alpha|\mathcal{F}_n)$ e $F(a) := \mu(\{x : f(x) > a\})$

Então, $\int_X f\, d\mu = \int_0^\infty F(a)\, da$

Porém:

$$F(a) = \mu\Big(\{x : \sup_n -\sum \mathbb{1}_A(x) \log \mu(A|\mathcal{F}_n)(x) > a\}\Big)$$
$$= \sum_{A\in\alpha} \mu\Big(\{x\in A : \sup_n -\log \mu(A|\mathcal{F}_n)(x) > a\}\Big)$$
$$= \sum_{A\in\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \mu\Big(\underbrace{\{x\in A : -\log\mu(A|\mathcal{F}_n)(x) > a,\ -\log\mu(A|\mathcal{F}_k) \le a \ \forall k<n\}}_{B_{n,A}}\Big)$$

($\mathcal{F}_n$-mensurável.)

$$= \sum_{A\in\alpha} \sum_n \int_{B_{n,A}} \mu(A|\mathcal{F}_n)\, d\mu$$
$$\le \sum_A \sum_n \int_{B_{n,A}} e^{-a}\, d\mu = \sum_A \sum_n e^{-a} \mu(B_{n,A})$$
$$\le \sum_A \min(e^{-a}, \mu(A))$$

$$\Rightarrow \int f\, d\mu \le \int \sum_A \min(e^{-a}, \mu(A))\, da$$
$$= \sum_A \Big(\int_0^{-\log\mu(A)} \mu(A)\, da + \int_{-\log\mu(A)}^{\infty} e^{-a}\, da \Big)$$
$$= H(\alpha) + 1$$

$\square$

Teorema: Seja α, α_n partições com entropia finita e $\mathcal{F}, \mathcal{F}_n$ σ-álgebras. Então:

(1) Se $\mathcal{F}_n \nearrow \mathcal{F}$, então $I(\alpha \mid \mathcal{F}_n) \to I(\alpha \mid \mathcal{F})$ q.t.p. e em $\mathcal{L}^1$. Além disso, $H(\alpha \mid \mathcal{F}_n) \searrow H(\alpha \mid \mathcal{F})$.

(2) Se $\alpha_n \nearrow \alpha$, então $I(\alpha_n, \mathcal{F}) \to I(\alpha, \mathcal{F})$ q.t.p. e em $\mathcal{L}^1$. Além disso $H(\alpha_n \mid \mathcal{F}) \nearrow H(\alpha \mid \mathcal{F})$.

(3) Se $\mathcal{F}_n \searrow \mathcal{F}$, então $H(\alpha \mid \mathcal{F}_n) \nearrow H(\alpha, \mathcal{F})$.

Prova.

(1) Pelo teorema de Doob: $\mu(A \mid \mathcal{F}_n) \longrightarrow \mu(A \mid \mathcal{F})$ q.t.p.

$\Rightarrow I(\alpha \mid \mathcal{F}_n) \longrightarrow I(\alpha \mid \mathcal{F})$ q.t.p.

$\overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow}$ " em $\mathcal{L}^1$.

(2) ~~De novo~~ Como em (1) usa-se Doob para obter que $I(\alpha_n \mid \mathcal{F}) \longrightarrow I(\alpha \mid \mathcal{F})$ q.t.p. Para obter convergência em $\mathcal{L}^1$, é suficiente aplicar o teorema da convergência monótona. (e o lema anterior).

(3) Neste caso, usa-se a teoria dos "martingales reversos", que é mais fácil do que a normal: $(\mu(A \mid \mathcal{F}_n))$ é um tal martingale. ~~Em particular, se α é finito~~
Segue, como antes, que $\mu(A \mid \mathcal{F}_n)$ é q.t.p. e em $\mathcal{L}^1$ convergente.
$\Rightarrow$ Se α é finita, obtém-se a afirmação.
Se α é enumerável, basta aproximar α com uma partição finita β.
— $\square$

Agora estamos prontos para provar o teorema central da teoria, usando os ~~seguintes identi~~ seguintes identidades:

(1) $E(f \mid \mathcal{F}) \circ T = E(f \circ T \mid T^{-1}(\mathcal{F}))$

(2) $I(\alpha \mid \mathcal{F}) \circ T = I(T^{-1}\alpha \mid T^{-1}\mathcal{F})$

(3) $H(\alpha \mid \mathcal{F}) = H(T^{-1}\alpha \mid T^{-1}\mathcal{F})$.

Usando as identidades, para

$$\alpha_i^j := \bigvee_{k=i}^{j} T^{-k}\alpha :$$

$$I(\alpha_0^n) = I(\alpha \vee \alpha_1^n) = I(\alpha_1^n) + I(\alpha \mid \alpha_1^n)$$

$$= I(\alpha_2^n) + I(T^{-1}\alpha \mid \alpha_2^n) + I(\alpha \mid \alpha_1^n)$$

$$\ldots = I(T^{-n}\alpha) + \sum_{k=0}^{n-1} I(T^{-k}\alpha \mid \alpha_{k+1}^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} I(\alpha \mid \alpha_1^{n-k}) \circ T^k \qquad (*)$$

Ou seja, $I(\alpha_0^n)$ é quase uma soma de Birkhoff e pode-se ~~provar~~ comprovar que $\left(\frac{1}{n} I(\alpha_0^n)\right)$ ~~pode~~ é convergente.

$\boxed{\text{Teorema (Shannon, McMillan, Breiman). } \left(\frac{1}{n} I(\alpha_0^n)\right) \text{ converge em } \mathcal{L}^1(\mu) \text{ e q.t.p.}}$

Prova ① Define $\alpha_- := \bigvee_{i=1}^{\infty} T^{-i}\alpha_i$. Usando $(*)$, basta mostrar que

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left| I(\alpha \mid \alpha_1^{n-k}) \circ T^k - I(\alpha \mid \alpha_-) \circ T^k \right| \longrightarrow 0 \quad \text{q.t.p. e em } \mathcal{L}^1,$$

pois $\frac{1}{n+1} \sum I(\alpha \mid \alpha_-) \circ T^k$ já é convergente pelo teorema de Birkhoff.

② Seja $g_k := | I(\alpha \mid \alpha_1^k) - I(\alpha \mid \alpha_-) |$. Pelo teorema anterior, $g_k \to 0$ q.t.p. e em $\mathcal{L}^1$. Além disso, pela invariância de μ, $\|g_k\|_1 = \| g_k \circ T^{n-k} \|_1$.

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum g_{n-k} \circ T^k \longrightarrow 0 \quad \text{em } \mathcal{L}^1.$$

③ Seja $h_m := \sup_{n \geq m} g_n$. Como $g_n \to 0$, $h_m \to 0$ q.t.p.
Como $0 \leq h_m \leq h_1 \leq I(\alpha \mid \alpha_1^m) + I(\alpha \mid \alpha_-)$, $\|h_m\|_1 \xrightarrow{m \to \infty} 0$.
Para N fixado, por Birkhoff:

$$\limsup \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} g_{n-k} \circ T^k \leq \limsup \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=n-N+1}^{n} h_1 \circ T^k + \sum_{k=0}^{n-N} h_N \circ T^k \right)$$

$$\overset{\text{q.s.}}{=} E(h_N \mid J) \xrightarrow{N \to \infty} 0 \quad \text{q.s.}$$

□

A entropia de um sistema dinâmico

Def: $h_\mu(T) := \sup\{ h(T,\alpha) : \alpha$ tem entropia finita $\}$

onde $h(T,\alpha) := H(\alpha|\alpha_-) = \lim \frac{1}{n} H(\alpha_0^{n-1})$

1ª aplicação: Seja T ergódico. Pelo teorema de Egorov, para cada $\varepsilon > 0$ $\exists$ $E \subset X$: $\left(\frac{1}{n} I(\alpha_0^{n-1})\right)$ converge uniformemente $\forall x \in E$.

Ou seja: $\forall \delta > 0$ $\exists N$ tal que $\forall n \geq N$

$\forall A \in \alpha_0^n$ com $\mu(A) \cap E > 0$:

$$\mu(A) = e^{-n h(T,\alpha) \pm n\delta} \iff (\mu(A))^{1/n} = e^{-h(T,\alpha) \pm \delta}.$$

Teorema: Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ergodic prop. preserving transformation. Então $h_\mu(T^k) = k\, h_\mu(T)$ e, se T é invertível, $h_\mu(T) = h_\mu(T^{-1})$

Prova: (i) Se $k = 0$, então $T^0 = id$ e, para cada partição de entropia finita, $\frac{1}{n} I\left(\bigvee_{i=0}^{n-1} (T^0)^{-i} \alpha\right) = \frac{1}{n} I(\alpha) \longrightarrow 0$.

(ii) Pelo teorema de SMB,

$$\lim_n \frac{1}{kn} I(\alpha_0^{n(k-1)}) = \lim_n \frac{1}{n}(\alpha_0^{n-1})$$

$$\Longrightarrow h(T^k, \alpha_0^{k-1}) = h(T,\alpha) \Rightarrow k\,h(T) \leq h(T^k).$$

(iii) $h_\mu(T^k, \alpha) \leq h_\mu(T^k; \alpha_0^{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha_0^{n(k-1)}) = k\,h(T,\alpha)$ $\square$

Problema: Como resolver o problema de achar partições que REALIZAM a entropy.

Def./Resposta:

1. α é geradora se $\sigma(T^{-k}(\alpha) : k \in \mathbb{N}) = \mathcal{B}$ mod μ
2. Se T é invertível, α é geradora se " $k \in \mathbb{Z}$ "

Teorema (Kolmogorov, Sinai)

Seja (α_n) uma sequência de partições tal que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ e $\sigma(\alpha_n \mid : n \in \mathbb{N}) = \mathcal{B}$ mod μ. Então

$$h_\mu(T) = \lim_{n\to\infty} h_\mu(T, \alpha_n)$$

~~Se α é gerador, então $h_\mu(T) = \lim_n h_\mu(\ldots$~~

Prova: Seja γ, β partições de entropia finita. Então:

$$\begin{aligned}
H(\beta_0^n) &\leq H(\gamma_0^n \vee \beta_0^n) = H(\gamma_0^n) + H(\beta_0^n \mid \gamma_0^n) \\
&\leq H(\gamma_0^n) + \sum_{k=0}^{n} H(T^{-k}\beta \mid \gamma_0^n) \\
&\leq H(\gamma_0^n) + \sum_{k=0}^{n} H(T^{-k}\beta \mid T^{-k}\gamma) \\
&= H(\gamma_0^n) + (n+1)\, H(\beta \mid \gamma)
\end{aligned}$$

Lema ...

$$\overset{\frac{1}{n}}{\Longrightarrow} \quad h(T, \beta) \leq h(T, \gamma) + H(\beta \mid \gamma).$$

Suponha que $\gamma = \alpha_n$. Então, para qualquer β:

$$h(T, \beta) \leq h(T, \alpha_n) + H(\beta \mid \alpha_n)$$

$$\overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow} h(T, \alpha_{n-1}) \leq h(T, \alpha_n) + H(\alpha_{n-1} \mid \alpha_n) = h(T, \alpha_n)$$

$\Longrightarrow$ $h(T, \alpha_n)$ é não-decrescente em n

$\Longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} h(T, \alpha_n) \in [0, \infty]$ existe.

Do outro lado,

$$\begin{aligned}
H(\beta \mid \alpha_n) = \int I(\beta \mid \alpha_n)\, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} &\int I(\beta \mid \mathcal{B})\, d\mu \\
&= \int \sum_{B} \mathbb{1}_B \log \underbrace{\mu(B \mid \mathcal{B})}_{= \mathbb{1}_B} d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad h(T, \beta) \leq \lim_n h(T, \alpha_n)$$

para qualquer β. $\square$

A fórmula de Abramov - Rokhlin

Referência: Bogenschütz - Crauel em "Ergodic Theory & Related Topics III", 1992

Teorema: Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ppt com fator $(Y, \mathcal{C}, \nu, S)$ tal que $\mathcal{C}$ é enumeravelmente gerada. Então:

$$h_\mu(T) = h_\nu(S) + h_\mu(T|S),$$

onde $h_\mu(T|S) := h_\mu(T|\pi^{-1}\mathcal{C})$, $\pi \circ T = S \circ \pi$, $\pi : X \to Y$.

Def. $h_\mu(T|S)$ é a entropia relativa, definida por

$$h_\mu(T|S) = \sup_\alpha h_\mu(T|S, \alpha) \quad \text{onde}$$

$$h_\mu(T|S, \alpha) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^{n-1} | \pi^{-1}\mathcal{C}).$$

Prova do teorema:

(1) Seja α partição finita de X e β partição fin. de Y.

Então:

$$H_\mu\left(\bigvee_{i=0}^{n-1}(\alpha \vee \pi^{-1}\beta)\right) = H_\mu\left(\alpha_0^{n-1} \vee \pi^{-1}(\beta_0^{n-1})\right)$$

lema...

$$= H_\nu(\beta_0^{n-1}) + H_\mu\left(\alpha_0^{n-1} | \pi^{-1}(\beta_0^{n-1})\right)$$

$$\geq H_\nu(\beta_0^{n-1}) + H_\mu\left(\alpha_0^{n-1} | \pi^{-1}(\mathcal{C})\right)$$

continuidade na 2ª coordenada.

taking $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(-)$ $\underset{(SMB)}{\Longrightarrow}$

$$h_\mu(T, \alpha \vee \pi^{-1}\beta) \geq h_\nu(S, \beta) + h_\mu(T|S, \alpha)$$

Tomando o supremo em α, β, obtemos que $h_\mu(T) \geq h_\nu(S) + h_\mu(T|S)$.

A outra direção segue do argumento seguinte:

$$H_\mu(\alpha_0^{mn-1}) \le H_\mu\left(\alpha_0^{mn-1} \vee \pi^{-1}(\beta_0^{mn-1})\right)$$

$$= H_\nu(\beta_0^{mn-1}) + H_\mu(\alpha_0^{mn-1} \mid \pi^{-1}\beta_0^{mn-1}).$$

<u>Porém.</u> $\alpha_0^{mn-1} = \bigvee_{i=0}^{mn-1} T^{-i}\alpha = \bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-im}\alpha_0^{m-1}$,

<u>Daí</u>:
$$H_\mu(\alpha_0^{mn-1} \mid \pi^{-1}\beta_0^{mn-1}) \le \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu(T^{-im}\alpha_0^{m-1} \mid \pi^{-1}\beta_0^{mn-1})$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} H_\mu\Big(T^{-im}\alpha_0^{m-1} \,\Big|\, \underbrace{\pi^{-1}S^{-im}}_{=T^{-im}\pi^{-1}}\beta\Big)$$

$$= n\, H_\mu(\alpha_0^{m-1} \mid \pi^{-1}\beta)$$

$$\xRightarrow{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot m}} \quad h_\mu(T,\alpha) \le h_\nu(S,\beta) + \frac{1}{m} H_\mu(\alpha_0^{m-1} \mid \pi^{-1}\beta)$$

Agora, por Kolmogorov-Sinai, se $\beta \to \varepsilon$, então

$$h_\nu(S,\beta) \to h_\nu(S) \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} H_\mu(\alpha_0^{m-1} \mid \pi^{-1}\beta) \to \frac{1}{m} H_\mu(\alpha_0^{m-1} \mid \pi^{-1}\varepsilon)$$

$$\xRightarrow{\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}} \quad h_\mu(T,\alpha) \le h_\nu(S) + h_\mu(T \mid S, \alpha).$$

Basta tomar o supremo em relação a α. □

Semicontinuidade da entropia:

Pelo teorema de Portmanteau, tem-se que, para $\mu_n \to \mu$ fraca* que

$$\lim \mu_n(A) = \mu(A) \quad \text{para qualquer } A \in \mathcal{B} \text{ com } \mu(\partial A) = 0.$$

Então, pela definição, se α é uma partição finita, $\text{com } \mu(\partial A) = 0 \ \forall A \in \alpha$ então α_0^n é finita e $\mu(\partial A) = 0 \ \forall A \in \alpha_0^n$.

Daí, $\mu \mapsto -\sum_{A \in \alpha_0^n} \mu(A) \log \mu(A)$ é contínua.

Além disso, como $H_\mu(\alpha_0^{n+m}) \leq H_\mu(\alpha_0^{n-1}) + H_\mu(T^{-n}(\alpha_0^m))$,

$$h_\mu(T, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^n) = \inf_n \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^n).$$

$\Rightarrow \mu \mapsto h_\mu(T, \alpha)$ é semicontínua superior:

$$\text{Para } \mu_n \to \mu, \quad \lim \sup h_{\mu_n}(T, \alpha) \leq h_\mu(T, \alpha)$$

<u>Proposição</u>: Seja $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ com X compacto, $\mu = \mu \circ T^{-1}$, $\mu(X) = 1$ tal que $\exists\ \varepsilon > 0$ com $\dim \alpha_0^n \to 0$ para qualquer α com $\dim \alpha < \varepsilon$. Então, a entropia é semicont. superior, ~~e~~ limitada e existe μ_{max} de entropia maximal.

<u>Prova</u>: Seja $x \in X$. Então, existe $r_x < \varepsilon/2$ tal que $\mu(\partial B_{r_x}(x)) = 0$.

$\overset{\text{compacto}}{\Longrightarrow}$ subcobertura finita, partição finita α com $\mu(\partial A) = 0\ \forall A \in \alpha$ e $\dim \alpha < \varepsilon$.

$\Rightarrow \mu \mapsto h_\mu(T, \alpha) = h_\mu(T)$ é semic. sup.

$\Rightarrow$ o ~~sup~~ máximo existe pois $M_1(X)$ é compacto $\square$.

Transformações expansivas:

Def. $T : X \to X$ de um espaço métrico é expansiva se $\exists \varepsilon > 0$:

$\forall x \neq y \ \ \exists n : \ d(T^n(x), T^n(y)) > \varepsilon$.

Exemplos: Shift, $2x \mod 1$

Consequência: Seja α uma partição com diam $\alpha < \varepsilon$. Então, diam $\alpha_0^n = 0$ e, pela proposição anterior, ~~a entropia~~ é existe uma medida de entropia máxima.

Sistemas com entropia nula

Teorema: Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de Lebesgue e $h_\mu(T) = 0$. Então, T é invertível (q.t.p).

Prova (Esboço):

~~$0 = \lim_{n\to\infty} H(\alpha | \alpha_1^n)$. Então (Lema 9.5.3), $\forall \varepsilon > 0, \exists n$ tal que pode-se agrupar α_1^n em uma partição β tal que $\sum \mu(A \triangle B) < \varepsilon$ $\forall A \in \alpha, B \in \beta$. Então, no limite α é α_1^∞ mensurável (Ver se é mais fácil ver) Seja~~

Seja α uma partição. Então $H(\alpha, \alpha^-) = 0$, e pelo Lema anterior, ~~α é α^- mensurável~~ é equivalente à α^--mensurabilidade de α. Por exemplo, para $\alpha = \{B, B^c\}$, B é α^- mensurável $\Rightarrow$ B é $T^{-1}(\mathcal{B})$ mensurável.

Variando B ~~de que~~ mostra que $\mathcal{B} \subset T^{-1}(\mathcal{B})$ mod μ.

Daí, $T : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $A \mapsto T^{-1}A$ é injetora e q.t.p. sobrejetora. Daí, T é q.t.p. injetora. $\square$