Ergodicidade

Def. Uma aplicação não-singular, chama-se *ergódica* se $T^{-1}B = B$ implica que $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B^c) = 0$.

Obs. Ergodicidade é uma "indecomposibilidade".

Umas consequências:

Proposição: Seja $T : X \to X$ não-singular com inversa não-singular, e seja μ não-atômica. Então μ é ergódica.

Prova: Seja W um conjunto errante. Então,

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n W$$

é conjunto invariante $\Rightarrow$ ou $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

Se $\mu(A) = 0$ $\forall$ W errante, então T é conservativo.

Então, suponha que $\mu(A) > 0$ $\Rightarrow$ $\exists k : \mu(T^k W) > 0$

Se μ não é atômica, então existe $B \subset T^k W : \mu(B), \mu(T^k W \setminus B) > 0$

$\Rightarrow$ $\cup T^n B$, $\cup T^n(T^k W \setminus B)$ são conjuntos invariantes de medida positiva, que é absurdo. $\square$

Proposição: Seja T não-singular. Então:

T é conservativo e ergódico

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_A \circ T^k = \infty \text{ q.t.p.} \quad \forall A : \mu(A) > 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \hat{T}^k(\mathbb{1}_A) = \infty \text{ q.t.p.} \quad \text{"}$$

Prova: (1) Suponha que T é cons. & ergódica.

Então: $\{x : \sum_{k=1}^{\infty} 1_A \cdot T^k x = \infty\} = \{x : \infty\text{-returns to } A\} =: Y$

é T-invariante. Se $\mu(A) > 0$, então $\mu(T^{-1}A) > 0$

$\overset{\text{cons.}}{\Longrightarrow} \mu(Y) > 0 \overset{\text{ergód.}}{\Longrightarrow} X = Y$ mod μ.

(2) Suponha que $\sum 1_A \circ T^k = \infty$ q.t.p $\forall A : \mu(A) > 0$

Se A é errante ou invariante obtém-se uma contradição.

(3) A terceira afirmação é uma consequência da dualidade $\square$

Um exemplo: Seja $X := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e

$T : X \to X$, $z \mapsto z e^{i\theta}$. Como T é uma isometria, T preserva a medida de Lebesgue.

$\Longrightarrow$ T é conservativo.

Caso $\mathbb{Q}$ Suponha que $\theta = 2\frac{p}{q} \cdot \pi$, para $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}_{>0}$.

Então, $T^q z = z(e^{i\theta})^q = z e^{iq\theta} = z e^{i \cdot 2\pi p} = z$.

$\Longrightarrow T^q = id$.

Define $r := \min\{n > 0 : T^n 1 = 1\} \leq q$. Pela propriedade de ser uma isometria, existe $\varepsilon > 0$ tal que

- $T^k(\underbrace{\{e^{it} : 0 \leq t < \varepsilon\}}_{W}) \cap W = \begin{cases} \emptyset & : k = 1, \ldots, r-1 \\ W & : k = r. \end{cases}$

- $X \setminus \bigcup_n T^n W$ é de medida positiva

$\Longrightarrow$ T não é ergódico.

Caso $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Suponha que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Então,

T é conservativo. Mas para mostrar que T é ergódico, vamos usar a teoria de Fourier:

Sejam $f, g \in L^2(X)$. Pela mudança de variáveis,

$$\langle f, g \rangle = \langle f \circ T, g \circ T \rangle$$

$\Rightarrow f \longmapsto f \circ T$ é uma isometria.

Porém, se $f(e^{it}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$, $f \circ T(e^{it}) = f(e^{i(t+\theta)}) = \sum a_k e^{ik(t+\theta)}$

$\Rightarrow$ os coeficientes de Fourier de $f \circ T$ são

$$\{ a_k \cdot e^{ik\theta} \}_{k \in \mathbb{Z}}$$

Daí, se $f = f \circ T$ e $\theta \notin 2\pi \mathbb{Q} \Rightarrow a_k = a_k e^{ik\theta} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \neq 0.$$

Ou seja, as únicas funções T-invariantes em $L^2(X)$ são as funções constantes. $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ T ergódico.

- Leb sempre é T-invariante
- T sempre é conservativo.
- T ergódico $\Longleftrightarrow \theta \notin 2\pi \mathbb{Q}$.

O método das séries de Fourier tb. funciona para rotações de $\mathbb{T}^n$ ou $T: \mathbb{T}^n$'s para $T \in M_n(\mathbb{Z})$.

Proposição: Seja $\mu = \mu \circ T^{-1}$, $\mu(X) = 1$. Então, são equivalentes:

1. T ergódica
2. Se $\mu(B \triangle T^{-1}B) = 0$, então $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$.
3. Se $\mu(A) > 0$, então $\mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} T^{-n}A\right) = 1$ (para um $k \in \mathbb{N}$)
4. Se $\mu(A), \mu(B) > 0$, então existe $n \geq 1$ t.q. $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$.
5. $f = f \circ T$ q.t.p $\Rightarrow$ f constante.

Prova:

$1 \Rightarrow 2$ Seja $C := \bigcap_{N=0}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{n=N}^{\infty} T^{-n}B}_{=: C_N}$.

Porém, como $\mu(B \triangle T^{-1}B) = 0$, $\mu(B \cap T^{-1}B) = \mu(B) = \mu(T^{-1}B)$

$\overset{\text{indução}}{\Longrightarrow}$ $\mu(B \cap T^{-n}B) = \mu(B)$,

$\Rightarrow$ $\mu(C_N \cap B) = \mu(B)$, $\mu(C_n \triangle B) = 0$.

$\Rightarrow$ $\mu(C \triangle B) = 0$.

Porém, como $C = \{x : T^n x \in B \ \infty\text{-vezes}\}$, $T^{-1}C = C$.

$2 \Rightarrow 1$: trivial

$1 \Leftrightarrow 3$: Seja $\mu(A) > 0$. Então, $\mu\left(\bigcup_{n \geq k} T^{-n}A\right) > 0$, e

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq k} A\right) = \mu\left(T^{-1}\bigcup_{n \geq k} T^{-n}A\right) = \mu\left(\bigcup_{n \geq k+1} T^{-n}A\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq 0} T^{-n}A\right).$$

Basta aplicar 2,

$1 \Leftrightarrow 4$ Corolário de $\sum 1_A \circ T^k = \infty$ q.t.p $\Leftrightarrow$ cons. & erg.

$1 \Leftrightarrow 5$: Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $f \circ T = f$ q.t.p.

$$\Rightarrow T^{-1}(\underbrace{\{x : f(x) \geq c\}}_{A_c}) = \{x : f \circ T(x) \geq c\}$$
$$= \{x : f(x) \geq c\} \mod \mu$$

Se T é ergódico, então 2 implica que $\mu(A_c) = 0$ ou 1.

$\overset{\text{ex.}}{\Longrightarrow} \quad \delta = \min\{c : \mu(A_c) = 0\}.$ $\square$

A outra direção é simples.

<u>Exemplo</u>: Espaço de Shift.

Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, $X := \{(\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_i \in \mathcal{A}\}$

e $\sigma : X \to X$, $(\omega_1, \ldots) \mapsto (\omega_2, \ldots)$

Além disso, sejam $(p_i)_{i \in \mathcal{A}} \in (0,1)$ com $\sum_{i \in \mathcal{A}} p_i = 1$.

Então, existe uma medida de prob. unicamente determinada por

$$\mu\Big(\underbrace{\{(\omega_i) : \omega_1 = a_1 \ldots \omega_n = a_n\}}_{[\omega_1 \ldots \omega_n]}\Big) = \prod_{i=1}^{n} p_i \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_1 \ldots a_n \in \mathcal{A}.$$

<u>Fato</u>: μ é σ-invariante

- <u>Partições</u>: Uma partição de um espaço X é uma decomposição de X em conjuntos disjuntos: $\mathcal{P}$ é partição se
  - $\mathcal{P}$ é subconjunto dos partes
  - se $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ ou $A = B$.
  - $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X$.

<u>Exemplo</u>: $\mathcal{P}_n = \{[\omega_1 \ldots \omega_n] : \omega_i \in \mathcal{A}\}$ é partição de X.

- <u>Partições geradas por partições</u>:

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} Q_i := \Big\{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i : A_i \in Q_i\Big\}, \text{ para}$$

Q_i partições de X

<u>Fato</u>: $\bigvee_{i=1}^{\infty} Q_i$ é sempre uma partição.

<u>Prova</u>: Dado $x \in X$, $\exists!\, A_i \in Q_i : x \in Q_i$

$\Rightarrow x \in \bigcap A_i$ etc. $\square$

Exemplo. $\mathcal{B}_n = \bigvee_{i=0}^{n-1} \sigma^{-i}(\{[a] : a \in \mathcal{A}\})$

A mesma definição aplica-se ~~para~~ σ-algebras

Def. $\bigvee_{i=0}^{\infty} \sigma^{-i}(\mathcal{B})$ é a σ-algebra terminal. Se $\bigvee_{i=0}^{\infty} \sigma^{-i}(\mathcal{B})$ é trivial mod μ, então σ chama-se **exato**. Como conjuntos invariantes pertencem à σ-alg. terminal, temos que $\boxed{\text{exato} \Rightarrow \text{ergódico}}$.

TAIL σ-algebra

Observações. ① Se T é bi-mensurável, $T^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{B}$. Daí, T não pode ser exato.

② exato $\Longleftrightarrow$ mixing

Teorema (Kolmogorov) A σ-algebra terminal do shift em relação com a medida anterior é trivial.

Prova. Seja $B \in \bigvee_{n=0}^{\infty} \sigma^{-n}(\mathcal{B})$. Então, existem (B_n) t.q. $B = T^{-n}B_n \Rightarrow T^n B = T^n(T^{-n}B_n) = B_n$.

Daí:

$$\mu(B \cap [w_1 \dots w_n]) = \mu(T^{-n}B_n \cap [w_1 \dots w_n])$$
$$= \mu(T^{-n}B_n)\,\mu([w_1 \dots w_n])$$
$$= \mu(B)\,\mu([w_1 \dots w_n])$$

Como qualquer $A \in \mathcal{B}$ é aproximável por cilindros,

$$\mu(B \cap A) = \mu(B)\mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$$

$$\Rightarrow 0 = \mu(B \cap B^c) = \mu(B)\mu(B^c) = \mu(B)(1-\mu(B))$$

$\Rightarrow \mu(B) = (\mu(B))^2 \Rightarrow \mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = 1$ $\square$

Critério de Lin

Seja T não-singular. Então

$$T \text{ exato} \iff \|\hat{T}^n(f)\|_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu),\ \int f\,d\mu = 0.$$

Prova. Aaronson p. 34, Lin: Mixing for Markov operators, 1971.

Aplicação. Seja T exato.

① Seja $f \in \mathcal{L}^1$, $\int f = 0$, $g \in \mathcal{L}^\infty$. Então

$$\int g\circ T^n\, f\, d\mu = \int g\, \hat{T}^n f\, d\mu \xrightarrow{\mathcal{L}^\infty = (\mathcal{L}^1)^*} 0$$

② Se $\hat{T}(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ e μ finito (i.e. $\mu \in \mathcal{M}_T$):

$$\int g\circ T^n\, f\, d\mu - \int g\, d\mu \int f\, d\mu$$

$$= \int g \left(\hat{T}^n(f) - \int f\, d\mu \right) d\mu$$

$$= \int g\, \hat{T}^n \Big(\underbrace{f - \int f\, d\mu}_{\int \cdot\, = 0} \Big)\, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \square$$

Decaimento de correlações, mas sem especificação da taxa.

O teorema ergódico de von Neumann

Teorema: Seja $\mathcal{U} : H \to H$ uma isometria do espaço de Hilbert H, e seja P a projeção ao espaço $I := \{v \in H : \mathcal{U}v = v\} = \ker(\mathcal{U} - Id)$. Então,

$$Pv = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{U}^j v .$$

Aplicação: Seja $T : X \to X$, $\mu = \mu \circ T^{-1}$, ~~para~~ $\mu(X) = 1$.

Então, para $f \in L^2(\mu)$:

$$\|f \circ T\|_2^2 = \int |f\circ T|^2 d\mu = \int |f|^2 = \|f\|_2 .$$

Daí, $\mathcal{U} : f \mapsto f\circ T$ é uma isometria (Pela lei do paralelogramo, $\mathcal{U}$ também preserva o produto interno.). Além disso, I contém as funções constantes (pois $\mu(X) = 1$). Se T é ergódica, $\dim(I) = 1$ e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\circ T = Pf = \int f d\mu$$

em $L^2(\mu)$.

Demonstração:

Passo 1 Vamos mostrar que $I = \underbrace{\{\mathcal{U}v - v : v \in H\}}_{B}{}^{\perp}$:

Seja $v \in I \Rightarrow \mathcal{U}v = v$ e, para qualquer $w \in H$:

$$\langle v, \mathcal{U}w - w\rangle = \langle \mathcal{U}v, \mathcal{U}w\rangle - \langle v, w\rangle = 0$$

$$\Rightarrow I \subset B^{\perp}.$$

Se $v \in B^{\perp}$, então $\langle v, Uw - w\rangle = 0 \; \forall w \in H$.

$$\Rightarrow \langle v, Uw\rangle = \langle v, w\rangle \; \forall w$$

$$\Rightarrow \langle U^* v, w\rangle = \langle v, w\rangle \; \forall w \Rightarrow U^* v = v.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \|Uv - v\| &= \langle Uv - v, Uv - v\rangle \\
&= \|Uv\|^2 - \langle v, Uv\rangle - \langle Uv, v\rangle + \|v\|^2 \\
&= \|v\|^2 \underbrace{- \langle U^* v, v\rangle - \langle v, U^* v\rangle + \|v\|^2}_{2\|v\|^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Daí, $H = I \oplus \overline{B}$, e para cada $v \in H$,

$$v = P(v) + v - P(v).$$

Além disso, para cada $\varepsilon > 0$, existe w tal que

$$\|\underbrace{(v - Pv) - (Uw - w)}_{g}\| \leq \varepsilon.$$

Daí,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j(v) = \frac{1}{n}\left(\sum U^j P(v) + \sum U^{j+1}v - U^j v + \sum U^j g\right),$$

e

$$\|P(v) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j(v)\| = \|\frac{1}{n}(U^{n+1}v - v) + \frac{1}{n}\sum U^j g\|$$

$$\leq \frac{2}{n}\|v\| + \varepsilon \longrightarrow \varepsilon. \; \square$$

O teorema de Birkhoff. Seja $T: X \to X$ mensurável, $\mu = \mu \circ T^{-1}$, $\mu(X) = 1$.

Então, para qualquer $f \in L^1(\mu)$,
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i = E(f \mid J) \quad \text{q.t.p. e em } L^1(\mu).$$

Obs: $E(f|J)$ é a única função T-invariante com $\int 1_A E(f|J)\, d\mu = \int 1_A f\, d\mu$ $\forall A : T^{-1}A = A$.

Observações.

- $g := E(f \mid J)$ é a esperança condicional: g é mensurável em relação com a σ-algebra ~~gerada por~~ $J := \{A : T^{-1}A = A\}$,

  e $\int_A 1_A g\, d\mu = \int_A g\, d\mu \quad \forall A \in J$.

  Construção em $L^2(\mu)$: $L^2(\mu, J)$ é um subespaço fechado de $L^2(\mu, B)$.
  Daí, existe a projeção ortogonal
  $$E(\cdot \mid J) : L^2(\mu, B) \to L^2(\mu, J).$$
  Depois, com um pouco trabalho, pode-se estender à $L^1(\mu)$:
  Sp.d.g. $f \geq 0$. Define $f_n := \min\{f, n\}$. Como $f_n \in L^2(\mu)$,
  $g_n := E(f_n \mid J)$ existe e satisfaz $\int 1_A g_n\, d\mu = \int 1_A f_n\, d\mu$.
  Basta ~~apli~~ verificar que (g_n) é monotona e aplica a conv. monotona.

- ~~Em dimensão~~ Se $\mu(X) = \infty$, T conservativo. Então, para cada sequência a_n:

  ou $\liminf \frac{1}{a_n} \sum f \circ T^k = 0$ q.t.p. $\forall f \in L^1(\mu)$.

  ou $\lim_k \frac{1}{a_{n_k}} \sum^{n_k - 1} f \circ T^k = \infty$ q.t.p. "

- Pode-se estender a convergência do teorema de convergência
  Neumann a $L^1(\mu)$, mas não à q.t.p.
  (Corollary 2.22 Einsiedler & Ward)

- A prova mais conhecida ~~direct~~ é pela ~~a~~ designaldade maximal ~~~~.

Mas vamos provar um pouco mais:

Uma sequência $f_n : X \to \mathbb{R}$ chama-se subaditiva se

$$f_{n+m} \le f_n + f_m \circ T^n \qquad \forall n,m \geq 1.$$

Exemplos: Soma de Birkhoff, log do produto de normas de operadores.

Teorema (Kingman): Seja μ invariante, $\mu(X)=1$, e seja (f_n) uma sequência subaditiva tal que $\max\{f_1, 0\} \in L^1(\mu)$.

Então,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{n} =: f$ q.t.p.,
- $\max\{f,0\} \in L^1(\mu)$, $f \circ T = f$ e
$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int f_n \, d\mu.$$

Observação:
- Kingman implica a ~~q.t.p.~~ parte q.t.p. de Birkhoff.
  Mas a ~~outra parte~~ convergência em L^1 é de novo uma aplicação de convergência monótona.
- Prova refinada por Karlsson & Margulis '99.
- Resultado bem mais geral de Derriennic 1983.

Agora: $\max\{f,0\} = f^+$

Para a prova clássica do teorema de Birkhoff (devido a Garcia), ver Einsiedler-Ward.

Prova do teorema do Kingman:

Seja (f_n) subaditiva. Então, $f_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} f_1 \circ T^k =: S_n(f_1)$

$$\Rightarrow f_n^+ \leq S_n(f_1^+) \Rightarrow f_n^+ \in L^1(\mu) \Rightarrow a_n := \int f_n \, d\mu \in [-\infty, \infty).$$

Lema. (FEKETE) Suponha que $a_{n+m} \leq a_n + a_m$. Então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n$ existe.

Prova do Lema: Seja $m = nk + p$, para k fixado, $0 \leq p < k$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} a_m \leq \frac{1}{m}\left(n \cdot a_k + a_p\right) \leq \frac{n}{nk+p} a_k + \frac{1}{m} a_p$$

$$\xrightarrow{m \to \infty} \frac{1}{k} a_k .$$

$$\Rightarrow \liminf \frac{1}{m} a_m \leq \limsup \frac{1}{m} a_m$$

Ou seja: $L := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} a_n$ existe.

Suponha que $\varphi_+ := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n$, $\varphi_- := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n$.

Vamos mostrar que $\int \varphi_+ \leq L \leq \int \varphi_-$ $\left(\Rightarrow \int \varphi_+ - \varphi_- = 0\right)$.

Para $\varepsilon > 0$, define $E_k := \left\{ x : \frac{1}{j} f_j(x) \leq \varphi_- + \varepsilon \text{ para um } j \leq k \right\}$

$$\Rightarrow E_k \nearrow X.$$

Além disso: Para $\psi_k := (\varphi_- + \varepsilon) \mathbb{1}_{E_k} + f_1 \mathbb{1}_{E_k^c}$,

$\psi_k \searrow \varphi_- + \varepsilon$. Ou seja

$$\lim_{k\to\infty} \int \psi_k \, d\mu \longrightarrow \int \varphi_- \, d\mu + \varepsilon$$

Lema. Para qualquer $1 \leq k < n$ e μ-q.t.p.

$$f_n \leq \sum_{i=0}^{n-k-1} \psi_k \circ T^i + \sum_{i=n-k-1}^{n} \max\{\psi_k, f_1\} \circ T^i$$

Prova: Por subaditividade, $\frac{1}{n} f_n \le \frac{1}{n}(f_{n-1}\circ T + f_1)$

$$\Rightarrow \varphi_- \le \varphi_- \circ T$$

$$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} : \quad [\varphi_- \geq \alpha] \subset [\varphi_- \circ T \geq \alpha]$$

$$\Rightarrow \mu([\varphi_- \geq \alpha]) \le \mu(T^{-1}[\varphi_- \geq \alpha]) = \mu([\varphi_- \geq \alpha])$$

$$\Rightarrow \varphi_- = \varphi_- \circ T \quad \text{q.t.p.}$$

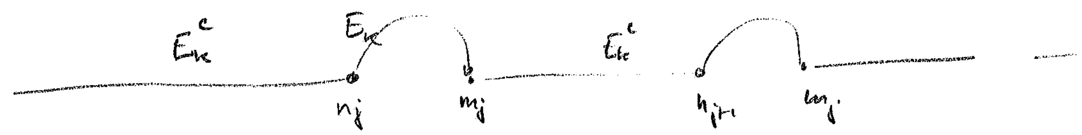
$\Rightarrow \exists\, \Omega : \mu(\Omega) = 1$ e $\varphi_-(x) = \varphi_- \circ T(x) \quad \forall x \in \Omega$.

Para $x \in \Omega$, define $m_0 = 0 \le n_1 < m_1 \le n_2 < m_2 < \cdots$

tal que n_j é minimal tal que

- $T^{n_j}(x) \in E_k$
- m_j t.q. $\underbrace{\frac{1}{m_j - n_j} f_{m_j-n_j}(T^{n_j}x)} \le \varphi_-(T^{n_j}x) + \varepsilon$

(n_j, m_j) existe pois $T^{n_j}(x) \in E_k$. Além disso, $m_j - n_j \le k$.



$f_{n_j}(x) \le f_{m_{j-1}}(x) + \sum_{i=-} f_1 \circ T^i$

$f_{m_j} \le f_{n_j}(x) + f_{m_j-n_j}(T^{n_j}x)$

Ou seja, em dividir a ~~órbita em partes~~ a soma em partes em E_k^c e entre n_j e m_j,

$$f_n(x) \le \sum_{\ell \notin [n_j, m_j)} \underbrace{f_1 \circ T^\ell(x)}_{= \psi_k \circ T^\ell x} + \sum_{j=1}^{-} \underbrace{f_{m_j-n_j}(T^{n_j}x)}$$

$$\le (\varphi_- \circ T^{n_j} + \varepsilon)(m_j - n_j)$$

$$= (\varphi_-(x) + \varepsilon)(m_j - n_j)$$

$$= \sum_{i=n_j}^{m_j-1} \psi_k \circ T^i x$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-k-1} \psi_k \circ T^j + \sum_{j=n-k}^{n-1} \max\{\psi_k, f_1\} \circ T^j .$$

$\square$

$$\boxed{\text{Corolário:} \quad \int \varphi_- \, d\mu = L}$$

Prova. Suponha que $\frac{1}{n} f_n \geq \mathcal{K} > -\infty \ \forall n$. Por Fatou:

$$\int \varphi_- \, d\mu = \int \liminf \frac{1}{n} f_n \, d\mu \leq \liminf \frac{1}{n} \int f_n \, d\mu = L.$$

Do outro lado:

$$\frac{1}{n} \int f_n \, d\mu \leq \frac{n-k}{n} \int \psi_k \, d\mu + \frac{k}{n} \int \max \ldots \, d\mu$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \int \psi_k \, d\mu \xrightarrow{k \to \infty} \int \varphi_- \, d\mu + \varepsilon.$$

Para tirar a limitação por $\mathcal{K}$:

seja $f_n^* := \max\{f_n, n\mathcal{K}\}$, $\varphi_-^* := \max\{\varphi_-, \mathcal{K}\}$.

Mas f_n^* é subaditiva e $\varphi_-^* = \liminf_n \frac{1}{n} f_n^*$:

$$\int \varphi_- \, d\mu \xleftarrow{\mathcal{K} \to -\infty} \int \varphi_-^* \, d\mu = \liminf \frac{1}{n} \int f_n^* \, d\mu \xrightarrow{\mathcal{K} \to -\infty} \liminf \frac{1}{n} \int f_n \, d\mu \quad \square$$

Lema: $\limsup \frac{f_{kn}}{n} = k \limsup \frac{f_n}{n}$

Prova: Ex.

$\boxed{\text{Não necessário}}$

Lema. Seja $f \in L^1(\mu)$. Então $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} (f \circ T^n) = 0$ q.t.p.

Prova. Note que $\mu(\{x : |f \circ T^n x| \geq n\varepsilon\}) = \mu(\{x : |f(x)| \geq n\varepsilon\})$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x : |f \circ T^n x| \geq n\varepsilon\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{[n\varepsilon, \infty)} \circ |f| \, d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \int \mathbb{1}_{[k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)} \circ |f| \, d\mu$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \int \mathbb{1}_{[k, k+1)} \circ \frac{|f|}{\varepsilon} \, d\mu$$

$$\leq 2 \int \frac{|f|}{\varepsilon} \, d\mu = \frac{2}{\varepsilon} \int |f| \, d\mu.$$

$$\overset{BC}{\Longrightarrow} \{n : |f \circ T^n| \geq n\varepsilon\} < \infty \text{ para q.t.p. } x \quad \square$$

Lema (esquema da prova). Se $\int |f_n| d\mu < \infty$ $\forall n$, então

$\int \varphi_+ \leq L$.

Prova. Para k fixado, defina $g_n := -\sum_{j=0}^{n-1} f_k \circ T^{jk} \leq -f_{nk}$

$\Rightarrow h := \liminf \frac{g_n}{n} \leq -\limsup \frac{f_{nk}}{n} \overset{\text{Lema anterior}}{=} -k \cdot \varphi_+$

$\Rightarrow \int h \leq -k \int \varphi_+ d\mu$, e, por Fatou:

$\int h \, d\mu \overset{(!)}{=} \liminf \int \frac{g_n}{n} d\mu = -\int f_k d\mu \leq -k \int \varphi_+ d\mu$

$\Rightarrow \int \varphi_+ d\mu \leq \lim_k \frac{1}{k} \int f_k d\mu = L$ □

O prova do teorema agora é consequência de TRUNCATION:

$f_n^* := \max\{f_n, n\kappa\}$, $\varphi_\pm^* = \max\{\varphi_\pm, \kappa\}$.

$\Rightarrow \int \varphi_-^* d\mu \geq L^* \geq \int \varphi_+^* d\mu$ □

(!) g_n é, por construção, aditivo

$\Rightarrow g_n$ é sub-aditivo $\Rightarrow$ a identidade é

consequência do corolário.

Generalização (Derriennic, 1983)

The almost sub-additive ergodic theorem

Seja (f_n) sequência em $L^1(\mu)$, (h_k) sequência em $L^1(\mu)$ com $h_k \geq 0$ tais que

1. $f_{n+k} - f_n - f_k \circ T^n \leq h_k \circ T^n$
2. $\sup_k \int h_k d\mu < \infty$
3. $\inf \frac{1}{n} \int f_n d\mu > -\infty$

$\Longrightarrow$ $\frac{1}{n} f_n \longrightarrow f_\infty$ q.t.p. e em $L^1(\mu)$. Além disso, $f_\infty \circ T = f_\infty$ e $\int f_\infty = \lim \frac{1}{n} \int f_n d\mu$.

A decomposição ergódica

Argumento chave : X completo, métrico separável $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ gerado enumeravelmente.

[Kuratowski Isomorphism Theorem :

$(X, \mathcal{B}, \mu)$, $\mu(X) = 1$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\overline{\mathcal{B}} := \langle \mathcal{B}, \{A : A \subset B, \mu(B) = 0\} \rangle$,

e $(X, \overline{\mathcal{B}}, \mu) \cong \left([0,a] \cup \{i \in \mathbb{N}, i \in I\}, \overline{\mathcal{B}}, \text{Lebesgue} + \text{medidas } ~~atómicas~~ \text{ de Dirac em } i \right)$.]

Como queremos preparar-nos para a teoria da entropia,...

Def. $\mathcal{P}$ é uma partição mensurável se existem partições enumeráveis $\mathcal{P}_n$ tal que $\mathcal{P} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$. Sem perda de generalidade, $(\mathcal{P}_n)$ é monótona em definir $\tilde{\mathcal{P}}_n := \bigvee_{k=1}^{k} \mathcal{P}_k = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} A_k : A_k \in \mathcal{P}_k \right\}$.

Além disso, $\mathcal{P}$ é a

- partição mais grossa com $\mathcal{P}_n \prec \mathcal{P}$ $\forall n$.

$\Leftrightarrow$ $x \overset{\mathcal{P}}{\sim} y \iff x \overset{\mathcal{P}_n}{\sim} y$ $\forall n$.

Tipicamente, $\mathcal{P}$ é não-enumerável. (Ex. Cantor)

Se $(X, \mathcal{B}, \mu)$ é um espaço de probabilidade, existe uma única medida de probabilidade $\hat{\mu}$ na σ-álgebra gerada por $\mathcal{P}$.

Teorema (D. ergódica) Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de prob. padrão, e $\mu = \mu \circ T^{-1}$. Então, existe uma partição mensurável $\mathcal{P}$ ~~tal que~~ e uma família de medidas de probabilidade $\{\mu_P : P \in \mathcal{P}\}$ em X tal que

- $P \to \mu_P(E)$ é mensurável ~~(...)~~ $\forall$ $E \in \mathcal{B}$, $\mu_P(P) = 1$.
- $\mu_P = \mu_P \circ T^{-1}$ para $\hat{\mu}$-q.t.p. $P \in \mathcal{P}$.
- μ_P é ergódica "
- $d\mu(x) = d\mu_P(x)\, d\hat{\mu}(P)$.

desintegração

Part 1: A existência da desintegração

Teorema (Rokhlin): Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ um espaço de prob. padrão, e $\mathcal{P}$ uma partição mensurável. Então, existe uma desintegração relativamente a $\mathcal{P}$.

Resultados preparatórios

Proposição. Seja X completo, métrico e separável, e $\mathcal{A}$ a álgebra gerada por uma base enumerável de abertos, e $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ uma função aditiva com $\mu(\emptyset) = 0$. Então, μ estende-se a uma medida de probabilidade boreliana em X.

Esboço da prova. Seja $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ a base dos abertos, e define

$$\gamma : X \longrightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$
$$x \longmapsto (\mathbb{1}_{U_k}(x)).$$

Então, $\gamma(X)$ é um subconjunto boreliano em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (Lema 5.2.3), e $\gamma : X \to \gamma(X)$ é bimensurável. Agora, usa-se o facto que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tem uma topologia simples (cilindros são clopen), que permite estender aditividade a σ-aditividade.

Construção da medida condicional:

Para $A \in \mathcal{A}$, define
$$\mu_p(A) := E(\mathbb{1}_A \mid \sigma(\mathcal{P}))(p).$$

Como $\mathcal{A}$ é enumerável, existe um conjunto $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ com $\hat{\mu}(\mathcal{P}_0) = 1$ tal que $\mu_p(A)$ é bem-definido para qualquer $p \in \mathcal{P}_0$, e aditivo!.

Pela proposição anterior, μ_p estende-se a uma medida sobre X.

Para ver que $\mu_p(p) = 1$, precisa-se na versão mais forte ~~dos~~ de convergência: Se $p = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in P_n$, então

$$\mu_p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mu(A \cap P_n)}{\mu(P_n)}$$

[Prova: Martingale convergence], para $A \in \mathcal{A}$

Pela construção, $\mu(A \cap P_n)/\mu(P_n) = 1$ para qualquer aberto que contém P_n. Então, por regularidade, $\frac{\mu(P_m \cap P_n)}{\mu(P_m)} = 1 \ \forall m \geq n$

$\Rightarrow \mu_p(P_n) = 1$, e $\mu_p(P) = 1$.

A afirmação final segue de um argumento de classes monótonas:

- $p \mapsto \mu_p(A)$ é mensurável para qualquer $A \in \mathcal{A}$.
- $\int \mu_p(A)\, d\hat{\mu}(p) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Seja $B_n \nearrow B$ ou $B_n \searrow B$, ~~então~~ para $B_n \in \mathcal{A}$. Então

$$\mu(B) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim \int \mu_p(B_n)\, d\hat{\mu} = \int \mu_p(B)\, d\hat{\mu} \quad (*)$$

Daí, ~~pol~~ $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, e $(*)$ vale em $\mathcal{B}$. $\square$

A prova da decomposição ergódica

Seja $\mathcal{A}$ como acima. Então, pelo teorema de Birkhoff e a enumerabilidade de $\mathcal{A}$, existe $X_0 \subset X$ com $\mu(X_0) = 1$ tal que

$$\lim \frac{1}{n} \sum_{i=1} \mathbb{1}_A \circ T_i(x) =: h_A(x) \quad \exists \quad \forall x \in X_0.$$

Vamos mostrar que $x \sim y :\Leftrightarrow h_A(x) = h_A(y) \ \forall A \in \mathcal{A}$ é uma partição mensurável: Seja $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ e P_n a partição gerada por

$$x \overset{n}{\sim} y \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{ou } (h_A(x), h_A(y) \leq r_n \ \forall A) \\ \text{ou } (h_A(x), \quad > r_n \ \forall A). \end{array}$$

Então, $\mathcal{P}$ é invariante e mensurável. Pelo teorema da decomposição, $\exists \{\mu_p : \text{probabilidade} : p \in \mathcal{P}\}$.

Invariância de μ_p: Tem-se

$$\int \mu_p(E)\, d\hat{\mu} = \mu(E) = \mu(T^{-1}E) = \int \mu_p \circ T^{-1}(E)\, d\hat{\mu}.$$

Suponha que $\mu_p(E) < \mu_p(T^{-1}E)$ para $p \in B$. Então

$$\int \mu_p(E\cap B)\, d\hat{\mu} = \mu(E\cap B) = \mu(T^{-1}(E\cap B)) = \mu((T^{-1}E)\cap B)$$
$$= \int \mu_p(T^{-1}E\cap B)\, d\hat{\mu} < \int \mu_p(E\cap B)\, d\hat{\mu}.$$

Ergodicidade: Basta provar que

(*) $\frac{1}{n}\sum \mathbb{1}_A \circ T^i \longrightarrow \mu_p(A) \quad \forall\ ~~p~~\ A \in \mathcal{B}\ \ \mu_p\text{-q.t.p.}$
e para $p \in \hat{\mathcal{B}}_0$, $\hat{\mu}(P_0) = 1$.

Para clássica: mostra que os conjuntos mensuráveis que satisfazem (*) contém $\mathcal{A}$ e são uma classe monótona. □

Comentário (Martingais)

① Filtração: Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espaço de probabilidade e $(\mathcal{F}_t : t \in I)$ uma família de σ-algebras e $t \in \mathbb{R}$.

Então, $(\mathcal{F}_t)$ é FILTRAÇÃO se $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{A}\ \forall s \le t$.

② Martingal: Seja $(\mathcal{F}_t)$ filtração e $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ uma aplicação $\mathcal{F}_t$-mensurável para qualquer $t \in I$.

Então (X_t) é ~~um~~ MARTINGAL se

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) = X_s \text{ q.t.p. } \forall\ s \le t.$$

$E(X_t)$ é SUPER/SUB MARTINGAL se $\le / \ge$.

③ Teorema (Doob I - Convergência q.t.p.): Seja (X_t) supermartingale t.q. ~~inf~~ $\sup \int X_t^- \, d\mu < \infty$. Então,

$$\lim_{t\to\infty} X_t =: X \quad \text{q.t.p.}$$

Os teoremas de Lévy :

① Seja $(\mathcal{F}_t)$ filtração, $X \in \mathcal{L}^1(\mu)$ e

$X_t := E(X \mid \mathcal{F}_t)$. Então

$$\lim_{t \to \infty} X_t =: X \quad \text{existe em} \quad \mathcal{L}^1(\mu) \text{ e q.t.p.}$$

Além disso, $X = E\left(X \mid \sigma\left(\bigcup_{t \in I} \mathcal{F}_t\right)\right)$.

("UPWARD")

② Seja $(\mathcal{F}_t)$ uma sequência de σ-algebras tal que $(\mathcal{F}_{-t})$ é filtração, $X \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$X_t := E(X \mid \mathcal{F}_t)$ e $\mathcal{F}_\infty := \bigcap_{t \in I} \mathcal{F}_t$.

Então $\lim_{t \to \infty} X_t = E(X \mid \mathcal{F}_\infty)$ q.t.p. e em $\mathcal{L}^1$.

("DOWNWARD")