2024 -2

Introdução a teoria ergódico.

Bibliografia

1) Viana - Oliveira : Fundamentos ... SBM 2014

- Bem escrito, com muitos exercícios.
- Cobertura da teoria clássica
- (Des-)vantagem: Somente precisa de conceitos básicos da teoria da medida (entropia, decomp. ergódica ...)

2) Einsiedler - Ward : Ergodic theory 2011

- Texto completo, apresentado todos os detalhes e as vezes provas diferentes.
- Parte de uma série ~~para~~ de livros para chegar em dinâmica homogenea.

3) Walters : Ergodic theory 1978

- Clássico.

4) Sarig : Lecture notes on ergodic theory 2023.

- Vista moderna à teoria ergódica

---

5) Aaronson - Intro a teoria ergódica infinita

- Arma secreta, exposição concisa
- Um dos poucos textos sobre medidas invariantes infinitas
- Contém o teorema de Chacon-Ornstein.

6) Krengel - Ergodic theorems

- Teoria ergódica de operadores positivos.

Um pouco de história

- Frações continuadas (Gauss 1812)

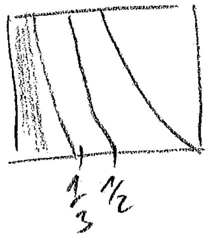
Fato: Para qualquer $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$, existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que $x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cdots}}$. Define $n_k := n_k(x)$.

Questão (Gauss): Qual é o comportamento "típico" de $n_k(x)$? Resposta parcial (Carta de Gauss ~~ao~~ Laplace, 1812)

Define $Tx := \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$. Então

- $T\left(\cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{\cdots}} \right) = \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3}} \cdots$.

- Gráfico:



- Gauss: Seja $m(A) := \int_A \frac{1}{1+x}\,dx$. Then $m(A) = m \circ T^{-1}(A)$, ou seja m é uma medida finita invariante.

Corolário: (Agora: $dm := \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{1}{1+x}\,dx$ (assim $m([0,1]) = 1$))

$$
\begin{aligned}
m(\{x : n_k(x) = \ell\}) &= m\left(\left\{x ; T^k(x) \in \left(\tfrac{1}{\ell+1}, \tfrac{1}{\ell}\right)\right\}\right) \\
&= m\left(\left(\tfrac{1}{\ell+1}, \tfrac{1}{\ell}\right)\right) = \int_{1/\ell+1}^{1/\ell} \frac{1}{1+x}\,dx = \log \\
&= \log\left(1 + \tfrac{1}{\ell}\right) - \log\left(1 + \tfrac{1}{\ell+1}\right) \\
&= \log\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right) - \log\left(\frac{\ell+2}{\ell+1}\right) = \log\left(\frac{\ell+2}{\ell}\right)
\end{aligned}
$$

Questão de Gauss (ou conjectura de Gauss)

$$
\left| m([n_{k+1} = \ell_1, n_1 = \ell_2]) - m([n_1 = \ell_1]) \cdot m([n_1 = \ell_2]) \right| \le C \cdot \lambda^k,
$$

para um $C > 0$ e $\lambda \in (0,1)$?

Recorrência de Poincaré (1890, provada por Carathéodory em 1919).

Seja (X,d) métrico, $T: X \to X$ mensurável e μ probab. com $\mu \circ T^{-1} = \mu$. Então, para μ-q.t.p. $x \in X$:

$$\liminf_{n \to \infty} d(x, T^n x) = 0.$$

À época, o teorema foi muito bem ~~recebido~~ e abriu as portas para a análise de sistemas dinâmicos através de da teoria medida.

Pouco depois, apareceram os teoremas ergódicos

Def: μ é ergódica $\iff$ $\forall A$ com $T^{-1}A = A$, ou $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

Von Neumann / Birkhoff (1932, 1931)

$T: X \to X$ mensurável, $\mu = \mu \circ T^{-1}$, $\mu(X) = 1$. Então

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i =: \Phi(f)$$

existe q.t.p. e em $\mathcal{L}^1$. Além disso, $\Phi(f) \circ T = \Phi(f)$.

Se μ é ergódica, $\Phi(f) = \int f \, d\mu$

Depois, houve generalizações para medidas invariantes infinitas (Hopf) e para o operador dual $\hat{T}$:

Seja (X, μ) espaço de medida e T não-singular, i.e.

$$\mu(A) = 0 \implies \mu(T^{-1}A) = 0.$$

Então, $\hat{T}: \mathcal{L}^1(\mu) \circlearrowleft$ é o operador definido por

$$\int f \circ T \, g \, d\mu = \int f \, \hat{T} g \, d\mu \quad \forall f \in \mathcal{L}^\infty(\mu), g \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Teorema (Chacon - Ornstein 1960). Para $f, g \in L^1(\mu)$, $g \geq 0$

$$\Phi_g(f) := \lim \frac{\sum_{k=0}^{n} \hat{T}^k f}{\sum_{k=0}^{n} \hat{T}^k g}$$

existe q.t.p. Além disso,

$$\{x : \Phi_g(f)(x) < \infty\} \subset \{x : \sum_{k=0}^{\infty} \hat{T}^k g(x) > 0\}.$$

O teorema quase fechou a área da teoria ergódica. Porém, pela analogia com a teoria de probabilidade e a motivação do lado da física e a teoria dos números, a área não parou de crescer.

Por exemplo:

- $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \longrightarrow ?$ (Gordin: $N(0,1)$) ~ 1970

- Ferromagneto de Ising:

$$\cdots - o - o - o - o - \cdots \qquad s_i \in \{-1, 1\}$$

$\quad -1 \quad 0 \quad +1 \qquad$ "Spin"

Agora: $H(i,j)$ interação entre i,j.

"Limite termodinâmico":

$$P_n = \frac{\sum e^{H(i,j) s_i s_j} \delta_{(i,s_i)}}{\sum_{\substack{-n \leq i,j \leq n, \\ s_i \in \{\pm 1\}}} e^{H(i,j) s_i s_j}} \xrightarrow{n \to \infty} P_\infty \quad \text{(med. de prob.)}$$

Ruelle 1968: Usar o operador de transfer para obter a assintótica de P_n e provar unicidade do limite.

$\longrightarrow$ Nascimento do "formalismo termodinâmico":

- Formalismo termodinâmico resolve o
  - "measure selection problem"
  - permite construir medidas com propriedades boas (p.ex. com decaimento exponencial de correlações)

Protagonistas: Bowen (1970, Axiom A), Sullivan (1980's, ligação medidas ⟷ geometria fractal ⟷ teoria espectral), ... Buzzi - Crovisier - Sarig 2022 —)

- Produtos 'aleatórios' de matrizes:

  Oseledets, Furstenberg, ...

  $\mathcal{K}: X \to GL_n(\mathbb{R})$

  $(x, A) \longmapsto (Tx, A \cdot \mathcal{K}(x))$,

  e assuntos relacionados.

Para voltar à meta:

- Note que (X, d) é um espaço polonês se X é separável e completo em relação com a métrica d.
- $(X, \mathcal{B}, m)$ é um espaço padrão se X é Polonês, $\mathcal{B}$ os borelianos e m uma medida
- $(X, \mathcal{F}, m)$ é um espaço de Lebesgue se X é Polonês, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ e $\mathcal{F}$ é completo em relação com m. (ie.: $A \subset B$, $m(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}$).

Fato sinistro: Se $(X, \mathcal{F}, m)$ é Lebesgue, $m(X) = 1$, então $(X, \mathcal{F}, m) \cong ([0, a], \mathcal{F}, \text{Lebesgue})$ ← parte não-atômica

$\dot\cup\ (J, P(J), p)$ ← parte atômica

onde: $a \in [0, 1]$, J enumerável, $p(i) > 0 \quad \forall\ i \in J$.

Problema: como todos os espaços ~~de~~ Lebesgue não-atômicos são conjugados a $([0,1], \text{Leb.})$, será que

que quer todos os sistemas dinâmicos são conjugados? ...

Kolmogorov (1959). A entropia (métrica) é um invariante de sistemas dinâmicos. Em particular,

$T: z \longmapsto z^2$ e $S: z \longmapsto z^3$ agindo em

$\{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$, munido com a medida de Lebesgue, não são conjugados pois

$$h(T) = \log 2, \quad h(S) = \log 3.$$

Princípio variacional: $P(T,\varphi) = \sup\left\{ h(\mu) + \int \varphi \, d\mu : \mu \text{ med. inv.} \right\}$.

I Medidas invariantes, recorrência e conservatividade

Def: Seja $(X, \mathcal{B}, \mu)$ espaço de medida, $T: X \to X$ mensurável. Então

① μ é invariante se $\mu(A) = \mu(T^{-1}A) \quad \forall A \in \mathcal{B}$

② não-singular se $\mu(T^{-1}A) = 0 \quad \forall A : \mu(A) = 0$.

Obviamente: ① invariante $\Rightarrow$ não-singular.

observação: ② μ finita ou infinita.

③ não-singular $\Rightarrow$ T sobrejetora mod μ (EX.)

Exemplo 1: $X = [0,1]$, $T: x \mapsto 2x - \lfloor 2x \rfloor =: 2x \bmod 1$

Neste caso (pois $Tx = 2x$ ou $Tx = 2x-1$)

$$T^{-1}(A) = \tfrac{1}{2}A \cup \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad Leb(T^{-1}A) = \tfrac{1}{2}Leb(A) + \tfrac{1}{2}Leb(A) = Leb(A).$$

$\Rightarrow$ Leb é T-invariante.

Exemplo 2: $T: [0,1] \to [0,1]$,

$$T(x) = \begin{cases} f(x) & : x \in [0,a] \\ g(x) & : x \in [a,1] \end{cases}$$

onde $f: [0,a] \to [0,1]$, $g: [a,1] \to [0,1]$ são diferenciáveis e monótonas.

$\Rightarrow$ T não singular em relação a Lebesgue.

observação: O mesmo argumento vale para $T: M \to M$, M Riemanniana e T difeo local fora de um conjunto de medida nula, T sobrejetor.

Proposição: (i) T preserva μ $\Leftrightarrow$ (ii) para qualquer f integrável, $\int f \, d\mu = \int f \circ T \, d\mu$.

Prova: Seja $A \in \mathcal{B}$. Então, $\mathbb{1}_A \circ T = \mathbb{1}_{T^{-1}A}$

$$\overset{(ii)}{\Longrightarrow} \mu(T^{-1}A) = \int \mathbb{1}_{T^{-1}A}\, d\mu = \int \mathbb{1}_A \circ T\, d\mu = \mu(A).$$

$\Rightarrow \mu$ invariante.

Agora, suponha que μ é invariante.

$$\Longrightarrow \int \mathbb{1}_A \circ T\, d\mu = \int \mathbb{1}_A\, d\mu.$$

Lembre que f é integrável se $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ são limites monótonos de funções simples e $\int f_+\, d\mu < \infty$ ou $\int f_-\, d\mu < \infty$.

No caso de f_+: Seja $f_n \uparrow f_+$,

$$f_n = \sum_{k=1}^{K_n} \lambda_{k,n} \mathbb{1}_{A_{k,n}}$$

$$\overset{(i)}{\Longrightarrow} \int f_n\, d\mu = \int f_n \circ T\, d\mu.$$

$$\overset{TCM}{\Longrightarrow} \int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu = \lim \int f_n \circ T\, d\mu = \lim \int f \circ T\, d\mu \quad \square$$

Teorema (Poincaré) Seja μ prob. invariante. Então, para qualquer E, $\mu(E) > 0$ e μ-q.t.p. $x \in E$, existe $n_k \nearrow \infty$ tal que $T^{n_k} x \in E$ $\forall k$.

Ou, escrito por funções:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_E \circ T^k = \infty \quad \text{para } \mu\text{-q.t.p. } x \in E.$$

Prova: Exercício.

<u>Corolário:</u> Na situação do teorema de Poincaré:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cancel{\ } \mathbb{1}_E \circ T^n = \infty \quad \text{para } \mu\text{-q.t.p. } x \in E.$$

e $\mu(E) > 0$.

<u>Versão métrica:</u> Na situação do teorema de Poincaré:

Seja $f : X \to Z$ mensurável, e (Z, d) um espaço métrico separável. Então:

$$\liminf_{n\to\infty} d(f(x), f(T^n x)) = 0 \quad \text{q.t.p.}$$

<u>Prova:</u> Seja $Z_+ := \{z : \mu(f^{-1}(B_\varepsilon(z))) > 0 \ \forall \ \varepsilon > 0\}$.
Então, Z_+ é fechado pois para $z \in \overline{Z_+}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{z} \in Z_+$ e δ tal que $B_\delta(\tilde{z}) \subset B_\varepsilon(z)$. Daí, $\mu(f^{-1}B_\varepsilon(z)) > 0$,

Pela separabilidade, existe (z_n, ε_n) tal que

$$Z_+^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\varepsilon_n}(z_n).$$

Daí, $\mu(f^{-1}(Z_+^c)) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f^{-1}(B_{\varepsilon_n}(z_n))) = 0$. Então,

$\mu(f^{-1}(Z_+)) = 1$ e, para qualquer $\varepsilon > 0$ e $z \in Z_1$.

$$\liminf_{n\to\infty} d(f(x), f(T^n x)) < \varepsilon \quad \text{para } \mu\text{-q.t.p. } x \in f^{-1}(B_\varepsilon(z)).$$

Por separabilidade, existe $(z_n) \subset Z_1$ tal que $Z_1 \subset \bigcup_n B_\varepsilon(z_n)$

$\Rightarrow$ Para μ-q.t.p. $x \in f^{-1}(\bigcup_n B_\varepsilon(z_n)) =: X_1$

$$\liminf d(f(x), f(T^n x)) < 2\varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, $\liminf d(f, f\circ T^n) = 0$ μ q.t.p. em X_1.
Como $f^{-1}(E_1) \subset f^{-1}(X_1)$, $\mu(X_1) = 1$. $\square$

<u>Corolário</u>. X separável, métrica, μ T-invariante. ~~Então~~

~~Então~~,
$$\liminf d(x, T^n x) = 0 \quad \mu \text{ q.t.p.}$$

<u>Comentário</u>. Para uma aplicação não-singular (i.e. $\mu \sim \mu T^{-1}$),
um conjunto W chama-se "wandering"/errante se
$$T^{-n} W \cap T^{-m} W = \emptyset \quad \forall\, n, m \geq 0,\ n \neq m.$$

<u>Aqui</u>: $D(T) := M\left(\bigcup_{W \text{ errante}} W\right)$

$\hookleftarrow$ measurable union $\to$ Aaronson

T chama-se <u>conservativo se</u> $\mu(DT) = 0$.
$\iff$ Não existem conjuntos errantes de medida positiva.

<u>Observação</u>: ① Modifique a prova ~~para~~ da recorrência de ~~recorrência~~ Poincaré para medidas conservativos.

② $X = D(T) \,\dot\cup\, (D(T))^c$ é a decomposição de Hopf:

$(D(T))^c$ é a parte conservativa
$D(T)$ "totalmente dissipativa".

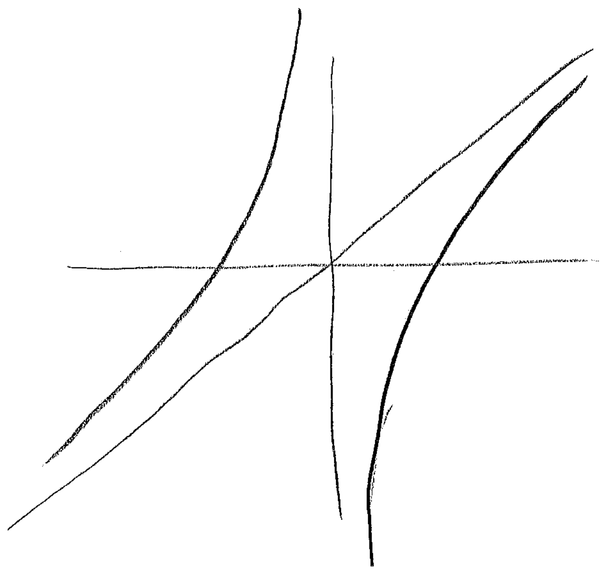
O exemplo clássico de uma aplicação conservativa sem probabilidade invariante (abs. cont. em relação com Lebesgue) é a "Boole's transformation":

<u>Teorema</u> (Boole 1857).

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f\left(x-\frac{1}{x}\right)\,dx$$

$\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com suporte compacto, e contínua.

Ou, pela proposição anterior, $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x - \frac{1}{x}$ deixa invariante a medida de Lebesgue:



$T : x \longmapsto x - \frac{1}{x}$.

<u>Prova-</u> Usemos conceitos de Cálculo 1: Se $x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$,

$$x - \frac{1}{x} = y \iff x^2 - yx - 1 = 0$$

$$\iff \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{4}$$

$$\Rightarrow \tau_1 x = \frac{y}{2} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}} \quad \text{ou} \quad \tau_2 x = \frac{y}{2} - \sqrt{1 + \frac{y^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \tau_1'(y) + \tau_2'(y) = \frac{1}{2} + \_\_ + \frac{1}{2} - \_\_ = 1$$

$$\overset{TFC}{\Longrightarrow} \int f = \int f \circ T .$$

□

Para provar que T é conservativo, usamos a aplicação do primeiro retorno / aplicação induzida.

Def. Seja (X, μ, T) não-singular e $A \subset X$ de medida estritamente positiva. Seja

$$\eta_A(x) := \inf\{n > 0 : T^n x \in A\}.$$

Se $\eta_A(x) < \infty$ para μ-q.t.p. $x \in A$, então

$$T_A : A \to A, \quad x \longmapsto T^{\eta_A(x)}(x)$$

chama-se transformação induzida / 1º retorno.

Observação. Como $\mu(\underbrace{\{x \in A : \eta(x) = \infty\}}_{E}) = 0$,

$$\mu(\{x \in A : \exists\, n > 0 \text{ t.q. } T_A^n(x) \in E\})$$
$$= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : T^n x \in E\}\Big)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap T^{-n}(E)) \leq$$
$$\leq \sum_{n>0} \mu(T^{-n}(E)) = 0.$$

$\Rightarrow$ Todos os iterados de T_A são q.t.p. definidos:

$$\mu(A) = \mu\Big(A \cap \bigcap_{n \geq 1} (T_A^{-n}(E))^c\Big)$$

<u>Proposição</u>: Suponha que $T|_A$ é bem definido, e que μ é σ-finita.

① T cons. $\Rightarrow$ T_A conservativo

② $\mu|_A$ é T_A-não-singular

③ Se $\mu = \mu \circ T^{-1}$, então $\mu|_A = \mu|_A \circ T_A^{-1}$.

<u>Prova</u>: ② é uma adaptação da prova anterior,

① é óbvio.

③ Seja $B \subset A$ com $0 < \mu(B) < \infty$.

$$B_n := T^{-n} B \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} T^{-k} A$$

$$= \{ x \in X : T^n x \in B, \quad x, Tx, \ldots T^{n-1} x \notin A \}.$$

$$B_0 = B.$$

$$\Rightarrow T^{-1} B_n \cap A = \left(T^{-n-1} B \setminus \bigcup_{k=1}^{n} T^{-k} A \right) \cap A$$

$$= [\varphi_A = n+1] \cap T^{-n-1} B \cap A$$

$$= T_A^{-1}(B) \cap [\varphi_A = n+1].$$

$$T^{-1} B_n = (T^{-1} B_n \cap A) \dot\cup B_{n+1}$$

$$\Rightarrow \mu(T_A^{-1} B) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-1} B_n \cap A)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-1} B_n) - \mu(B_{n+1}) \quad \Big\downarrow \text{inv.}$$

$$= \mu(B) - \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

$$= \mu(B)$$

<u>pois</u>: $\mu(B) < \infty$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$. □

~~Para mostrar que os ..., a conservatividade de T_A~~
~~implica a conservatividade de T,~~

~~Para mostrar a afirmação recíproca, suponha que~~
~~$A \xrightarrow{T^n} T^n A$ é bimensurável, bi-não-singular e~~

Para obter a conclusão oposta, suponha que:

(1) $T^n A \to T^n A$ é bimensurável e bi-não-singular

(2) $\bigcup T^n A = X \mod \mu$.

Então, se $T|_A$ é bem-definido e conservativo, então T é conservativo.

Prova: Ex. $\square$

Aplicação. É fácil ver que, no caso de Boole,

$T_{[1,2]}$ é bem definido $\overset{\text{Prop.}}{\Longrightarrow}$ Leb. é $T_{[1,2]}$-invariante $\Rightarrow$ $T_{[1,2]}$ é conservativo.

$\Rightarrow$ T é conservativo.

Teorema (Fórmula de Kac) Seja T conservativa, μ σ-finita e invariante e A: $0 \leq \mu(A) < \infty$ tal que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}A \mod \mu$. Então, para $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\int f \, d\mu = \int_A \sum_{n=0}^{\varphi_A(x)-1} f \circ T^n \, d\mu .$$

Em particular, $\mu(X) = \int \varphi_A \, d\mu$.

Prova. Seja B mensurável com $\mu(B) < \infty$. Então, para $B_n := T^{-n} B \setminus \bigcup_{k=0}^{n} T^{-k} A$,

$$T^{-1} B_n = B_{n+1} \,\dot\cup\, \left(T^{-1} B_n \cap A\right)$$

$$\overset{\mu = \mu\circ T^{-1}}{\Longrightarrow} \quad \mu(B_n) = \mu(B_{n+1}) + \mu\left(T^{-1} B_n \cap A\right) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B_0) = \mu\left((T^{-1}B_0) \cap A\right) + \mu(B_1)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(A \cap T^{-1} B_0\right),$$

pois $\mu(B_n) \longrightarrow 0$.

$$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A \cap B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A \cap \left(T^{-n} B \setminus \bigcup_{k=0}^{n} T^{-k} A\right)\right)$$

$$= \int_A \mathbb{1}_B \, d\mu + \sum_{n=1}^{\infty} \int_A \mathbb{1}_B \circ T^n \cdot \mathbb{1}_{[\varphi_A > n]} \, d\mu$$

$$= \int_A \mathbb{1}_B + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_B \circ T^n \cdot \mathbb{1}_{[\varphi_A > n]}}_{\sum_{k=1}^{\varphi_A(x)-1} \mathbb{1}_B \circ T^k} \, d\mu$$

$$= \int_A \sum_{k=0}^{\varphi_A(x)-1} \mathbb{1}_B \circ T^k \, d\mu$$

Daí, o teorema vale para funções positivas e simples.

$\leadsto$ para $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\square$

Existência de medidas invariantes

Para mostrar a existência de medidas invariantes, vamos ao primeiro analisar o caso de uma aplicação não-singular.
Para isto, definiremos o operador de transfer:

Seja (X, μ, T) não-singular. Então, $\hat{T}: L^1(\mu) \to L^1(\mu)$ é definido por

$$\int f \, g \circ T \, d\mu = \int \hat{T}(f) \, g \, d\mu$$

$\forall f \in L^1(\mu)$, $g \in L^\infty(\mu)$.

<u>Proposição.</u> Suponha que (X, μ, T) não-sing., μ σ-finita.

1. Seja $h \geq 0$ tal que $\hat{T}(h) = h$. Então $h \, d\mu$ é uma medida invariante.
2. Se $m \ll \mu$, então $\hat{T}(dm/d\mu) = dm/d\mu$.

Para provar a Prop., estendemos a definição de $\hat{T}$ à funções com $\int h \, d\mu = \infty$, $h \geq 0$. Por definição, $h = \lim_{n\to\infty} h_n$, onde h_n é sequência crescente de funções com $\int h_n \, d\mu < \infty$.

Ou seja, dizemos que $\hat{T}(h) = f$ se $f = \lim_{n\to\infty} \hat{T}(h_n)$.
Para mostrar que f existe, vamos mostrar que $\hat{T}(h_n)$ é monótona:

<u>Prop.</u> Se $f \geq g$, $f, g \in L^1(\mu)$, então $\hat{T}(f) \geq \hat{T}(g)$.

<u>Prova.</u> É fácil ver que $\hat{T}$ é linear (usando a dualidade $(L^1)^* = L^\infty$). Daí, basta mostrar que $f \geq 0 \Rightarrow \hat{T}(f) \geq 0$:
Suponha que existe A: $0 < \mu(A) < \infty$ tal que $\hat{T}(f)(x) < 0$ $\forall x \in A$ $\Rightarrow 0 > \int \hat{T}(f) \mathbb{1}_A \, d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A \circ T \, d\mu \geq 0$ $\square$

Prova do teorema:

(1) $\int \mathbb{1}_A \, h \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A \, h_n \, d\mu$ pelo TCM (Aqui: $h_n \nearrow h$).

Como $\hat{T}(h) = h$,

$$\int \mathbb{1}_A \circ T \, h \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A \circ T \, h_n \, d\mu$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A \, \hat{T} h_n \, d\mu = \int \mathbb{1}_A \, h \, d\mu.$$

(2) Suponha que $\int \mathbb{1}_A \circ T \, h \, d\mu = \int \mathbb{1}_A \, h \, d\mu$, $h := \frac{dm}{d\mu}$.

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A \, \hat{T}(h_n) \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_A \, h_n \, d\mu \quad \forall A.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \hat{T}(h_n) = \lim_{n\to\infty} h_n \quad \text{q.t.p.}$$ $\square$

Obs: μ σ-finita é necessário para $dm/d\mu$ e na prova da monotonia de $\hat{T}$.

Uma outra possibilidade de mostrar a existência de medidas invariantes é baseado no teorema de Banach-Alaoglu: a bola unitária (no dual) é fraca*-compacta.

Suponha que X é loc. compacto, Hausdorff e $T: X \to X$ é contínuo. Seja $\mathcal{M}_1(X) := \{\mu : \mu \text{ Borel e } \mu(X) = 1\}$.

Lema: $T_*: \mathcal{M}_1(X) \circlearrowleft$, $\mu \longmapsto \mu \circ T^{-1}$ é fraca* contínua.

Prova: Por Riesz-Markov, $\mathcal{M}_1(X) \subset (C_c(X))^*$.

Além disso, a topologia é metrizável. Daí:

$$\mu_n \to \mu \iff \int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu \quad \forall f \in C_c(X)$$

$$\Rightarrow \int f \circ T \, d\mu_n \to \int f \circ T \, d\mu \quad \forall f \Rightarrow T_*\mu_n \to T_*\mu$$ $\square$

Lema: Seja $\nu \in \mathcal{M}_1(X)$ ponto de acumulação de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T_*^k \mu$. Então $T_*\nu = \nu$.

Prova. Suponha que $\underbrace{\frac{1}{n_\ell}\sum_{k=0}^{n_\ell-1} T_*^k(\mu)}_{\mu_\ell} \longrightarrow \nu$. Daí, para $f \in C_c(X)$:

$$\int f\,d\mu_\ell - \int f\circ T\,d\mu_\ell = \frac{1}{n_\ell}\Big(\underbrace{\int f\,d\mu - \int f\circ T^{n_\ell}\,d\mu}_{\le 2\|f\|_\infty}\Big) \longrightarrow 0.$$

$$\Longrightarrow \nu = \lim_{\ell\to\infty}\mu_\ell = \lim_{\ell\to\infty} T_*\mu_\ell = T_*\big(\lim \mu_\ell\big) = T_*\nu \quad \square$$

Teorema (Krylov - Bogoliubov) Seja X compacto e $T: X \to X$ contínua. Então, existe $\mu \in \mathcal{M}_1(X)$, $T_*(\mu) = \mu$.

Prova. Por Banach-Alaoglu, $\{\mu$ medida complexa $|\ |\mu| \le 1\} = B_1$ é fracamente compacta. ~~Como $\{\mu$ medida pos. $|\ \mu(X) \le 1\} = B_1$, é fechado, $\mathcal{M}_{\le 1}$ é compacto.~~

Porém, como X é compacto, $\mathbb{1} \in C_c(X)$.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{M}_1(X)$ é fechado em B_1 $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}_1(X)$ fracamente compacto.

Como $\mathcal{M}_1(X)$ é metrizável, o teorema é consequência do Lema anterior.

Obs: Se X não é compacto, então
$$\overline{\mathcal{M}_1(X)} = \{\mu : \mu(X) \le 1\}.$$

Uma breve análise do espaço das medidas invariantes.

Def. Seja $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ não-singular. Então, T é *ergódico* se $T^{-1}A = A \mod \mu$ implica que $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A^c) = 0$.

Observação e definições : X esp. top.

$$\mathcal{M}_T := \{ \mu \in \mathcal{M}_1(X) : T_*(\mu) = \mu \}.$$

Obviamente, $\mathcal{M}_T$ é conjunto convexo
Note que um ponto $x \in C$, Convexo é Extremal se

$$x = sa + (1-s)b \quad \text{para } 0<s<1 \text{ e } a,b \in C$$
implica que $x = a = b$.

Teorema. Seja X espaço topológico, T mensurável tal que $\mathcal{M}_T \neq \emptyset$. Então, os pontos extremais de $\mathcal{M}_T$ são as probabilidades invariantes e ergódicas.

Prova:

① Suponha que μ não é ergódica. Então $X = A \dot\cup B$, $T^{-1}A = A$, $T^{-1}B = B$ em $\mu(A), \mu(B) > 0$. Daí,

$$\mu = \mu(A) \cdot \left(\frac{1}{\mu(A)} \mu|_A\right) + \mu(B) \cdot \left(\frac{1}{\mu(B)} \mu|_B\right).$$

Ou seja μ não é extremal.

② Suponha que μ é ergódica e $\mu = s\nu_1 + (1-s)\nu_2$ para $s \in (0,1)$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}_T$. Então, $\nu_1 \ll \mu$. Por Radon-Nikodym, $f := \frac{d\nu_1}{d\mu} \in L^1(\mu)$ e $d\nu_1 = f\,d\mu$.

Define $B := \{ x : f(x) < 1 \}$. Então

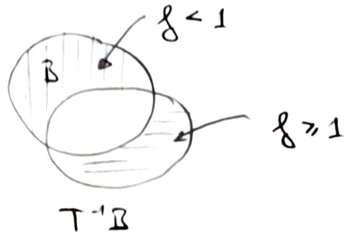
$$\nu(B) = \int_{B \setminus T^{-1}B} f\,d\mu + \int_{B \cap T^{-1}B} f\,d\mu$$

$$\| $$

$$\nu(T^{-1}B) = \int_{T^{-1}B \setminus B} f\,d\mu + \int_{T^{-1}B \cap B} f\,d\mu$$

$$\Rightarrow \int_{B \setminus T^{-1}B} f\,d\mu = \int_{T^{-1}B \setminus B} f\,d\mu$$

Pois:



$$\Rightarrow \int_{B\setminus T^{-1}B} f\,d\mu = \int_{T^{-1}B\setminus B} f\,d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \mu(B\setminus T^{-1}B)=0, \quad \mu(T^{-1}B\setminus B)=0$$

$$\Rightarrow \mu(B\,\triangle\, T^{-1}B)=0$$

$\overset{\mu\ \text{erg.}}{\Longrightarrow}$ $\mu(B)=1$ ou $\underline{\underline{\mu(B)=0}}$.

Mas se $\mu(B)=1$: $\quad 1=\int d\mu > \int f\,d\mu = \nu_1(X)=1$ ↯.

Do mesmo jeito para $[f>1]$.

$$\Rightarrow \mu(\{x : f(x)=1\}) = 1 \Rightarrow \mu=\nu. \qquad \square$$