O teorema espectral para operadores compactos

Def. Seja X Hilbert. Então $A : X \to X$ é

NORMAL se $AA^* = A^*A$.

Comentários: autoadj. $\Rightarrow$ normal, unitário $\Rightarrow$ normal,

a algebra de Banach* gerada por A é abeliana

se A é normal.

Teorema. Se A é normal, então $\|A\| = r(A)$.

Prova: Seja $v \in X$, $\|v\| = 1$. Então:

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av\rangle = \langle A^*Av, v\rangle$$

$$\leq \|A^*Av\| \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\|\,\|A\|$$

$$\Rightarrow \|A\|^2 \leq \|A^*\| \cdot \|A\| \Rightarrow \|A\| \leq \|A^*\| \leq \|A\|.$$

Porém, usando a normalidade de A:

$$\|A^2 v\| = \langle A^2 v, A^2 v\rangle = \langle A^*A^*AAv, v\rangle$$

$$= \langle A^*Av, A^*Av\rangle = \|A^*Av\|$$

$$\leq \|A\|\,\|A^*\| = \|A\|^2.$$

$$\Rightarrow r(A) = \lim_{n\to\infty} \left(\|A^{2^n}\|\right)^{1/2^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\|A\|^{2^n}\right)^{1/2^n} = \|A\|.$$

$\square$

Comentários

1) Na prova mostramos que $Av = \lambda v \Rightarrow A^* v = \bar{\lambda} v$.

Em particular, se A é autoadjunto, $\lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

2) Se A é unitário e compacto, então $\dim X < \infty$.

3) Se A é autoadjunto, então existe um autovetor v tal que $Av = \|A\| v$ ou $Av = -\|A\| v$.

Prova: Mostremos que $\sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| = \|A\|$

$\Rightarrow \exists$ sequência x_n com $\|x_n\| = 1$ e

$$\lim_{n \to \infty} |\langle Ax_n, x_n \rangle| = \|A\|$$

S.p.d.g. $\lim_{n\to\infty} \langle Ax_n, x_n \rangle = \mu$ existe e, por compacidade, s.p.d.g. $\lim_{n\to\infty} Ax_n$ existe.

$$\Rightarrow 0 \leq \|Ax_n - \mu x_n\|^2$$
$$= \|Ax_n\|^2 - 2\langle Ax_n, x_n \rangle \cdot \mu + \mu^2$$
$$\xrightarrow{n \to \infty} \lim_{n\to\infty} \|Ax_n\|^2 - \mu^2 \leq \mu^2 - \mu^2 = 0$$

$\Rightarrow \|Ax_n - \mu x_n\| \to 0$

Como (Ax_n) é convergente, $x := \lim x_n$ existe

Além disso, $Ax = \mu x$. $\square$

Caso 1 : espectro pontual $S_p(A)$

Caso 2 : espectro cont. $S_c(A)$

Caso 3 : espectro residual $S_r(A)$

Análise dos casos

~~$\lambda \in$ Espectro~~

(i) Se $\lambda \in S_p(A)$: $\Rightarrow$ $\exists\, v : Av = \lambda v$, pois $\ker(A - \lambda) \neq \{0\}$.

(ii) Se $\lambda \in S_c(A)$: Note que $\inf\{\|A - \lambda v\| : \|v\| = 1\} = 0$

(caso contrário, $A - \lambda \mathrm{Id}$ seria uma aplicação aberta e, então $(A - \lambda \mathrm{Id})(X)$ seria fechado).

$$\Rightarrow \exists\, (x_n) \text{ com } \|x_n\| = 1 \text{ tal que}$$

$$\lim_{n \to \infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0 .$$

Neste caso, (x_n) é chamado de autovetor "approximate".

(iii) Se $\lambda \in S_r(A)$, existe um aberto $\mathcal{U}$ tal que

$Ax - \lambda x = v$ não tem solução $\forall\, v \in \mathcal{U}$.

Exemplos

- A normal, compacto $\Rightarrow$ $S_p(A) = S(A)$
- A compacto $\Rightarrow$ $S_p(A) \cup \{0\} = S(A)$
- $X = \ell^2(\mathbb{N})$, $A(x_1, x_2, \ldots) = A(x_2, \ldots)$

$$\Rightarrow \{z : |z| < 1\} = S_p(A),$$

$$\{|z| = 1\} = S_c(A) .$$

Um approx autovetor é dado por

$$x_n = (\underbrace{\sqrt{n}^{-1}, \ldots \sqrt{n}^{-1}}_{n}, 0, 0 \ldots)$$