3ª Prova - Analise Funcional

11 de julho de 2024
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Questão 1. (**2p**) Seha X um espaço de Banach reflexivo. Mostre que, para qualquer $\varphi \in X^* \setminus \{0\}$, existe $x_{\max} \in X$ com $\|x_{\max}\| = 1$ tal que

$$\varphi(x_{\max}) = \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \le 1\right\}.$$

Solução 1. Como X é reflexivo, a bola unitário $B := \{x \in X : \|x\| \le 1\}$ é fracamente compacto. Além disso, por definição, qualquer $\varphi \in X^*$ é contínua na topologia fraca: Para qualquer $\varphi \neq 0$ e $z \in \mathbb{C}$, existe $x : \varphi(x) = z$. Então

$$\varphi^{-1}(B_\epsilon(z)) = \{y \in X : |\varphi(y) - z| < \epsilon\}$$

é aberto na topologia fraca por definição. Por compacidade, existe $x_1 \in B$ tal que $|\varphi(x_1)| = \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \le 1\right\}$. Para $\lambda := \overline{\varphi(x_1)}/|\varphi(x_1)|$ e $x_{\max} := \lambda x_1$,

$$\varphi(x_{\max}) = \lambda\varphi(x_1) = |\varphi(x_1)| = \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \le 1\right\}.$$

Basta mostrar que $\|x_{\max}\| = 1$. Mas se $\|x_{\max}\| < 1$, então

$$|\varphi(x_{\max})| = \|x_{\max}\|^{-1} \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \le 1\right\} > \sup\left\{|\varphi(x)| : x \in X, \|x\| \le 1\right\},$$

que é absurdo.

Questão 2. (**1.5p + 0.5p + 2p**) Seja $X = \ell^p(\mathbb{N})$ para $1 \le p < \infty$, $Y = \ell^1(\mathbb{N})$ e $T : X \to Y$ um operador limitado.

a) Mostre que, para $x, y_1, y_2, \ldots \in X$, tal que $y_n \rightharpoonup 0$ (i.e. (y_n) converge para 0 fracamente), que
$$\limsup_{n\to\infty} \|x + y_n\|_p^p = \|x\|_p^p + \limsup_{n\to\infty} \|y_n\|_p^p.$$

b) Mostre que, para $x \in X$, $y_n \rightharpoonup 0$ e qualquer $t > 0$ que
$$\|T(x)\|_1 + t \limsup_{n\to\infty} \|Ty_n\|_1 \le \|T\| \left(\|x\|_p^p + t^p \limsup_{n\to\infty} \|y_n\|_p^p\right)^{1/p}.$$

c) Suponha que $p > 1$. Mostre que T é compacto.
Dica. Mostre que a imagem sob T de uma sequência fracamente convergente em X é fortemente convergente em Y.

Comentário. Pode-se aplicar o resultado de (a) para provar (b) e o resultado de (b) para provar (c), sem ter provado estes previamente.

Solução 2. a) Suponha que $x = (x_1, \dots x_k, 0, 0, \dots)$ e $y_n = (y_1^{(n)}, y_2^{(n)}, \dots)$. Como $y_n \rightharpoonup 0$, obtem-se que $\lim_n y_i^{(n)} = 0$ para qualquer i. Então,

$$\begin{aligned}\limsup_n \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i^{(n)}|^p + \sum_{i=k+1}^{\infty} |y_i^{(n)}|^p &= \sum_{i=1}^{k} |x_i|^p + \limsup_n \sum_{i=k+1}^{\infty} |y_i^{(n)}|^p \\ &= \|x\|^p + \limsup_n \|y_n\|^p\end{aligned}$$

O caso geral é uma consequência do fato que o subespaço dos elementos com um número finito de entradas não nulos é denso.

b) Pela definição da norma de T, $\|T(x + t y_n)\|_1 \leq \|T\| \, \|x + t y_n\|_p$. Daí, por (a),

$$\|T(x)\|_1 + t \limsup_n \|T y_n\|_1 \leq \|T\| \left(\|x\|_p^p + t^p \limsup_n \|y_n\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

c) Pela definição de $\|T\|$, existe (x_m) com $\|x_m\| = 1$ para qualquer m e $\|T x_m\| \to \|T\|$. Se $y_n \rightharpoonup 0$, mas $y_n \not\to 0$, então $\gamma := \limsup_n \|y_n\|_p^p > 0$. Daí, por (b),

$$\limsup_n \|T y_n\|_1 \leq \frac{1}{t} \left(\|T\| \left(1 + \gamma t^p\right)^{\frac{1}{p}} - \|T\| \right).$$

Daí, a derivada de $\|T\| \left(1 + \gamma t^p\right)^{1/p}$ em 0 é uma limitação superior para $\limsup_n \|T y_n\|_1$. Como $\partial_t \left(1 + \gamma t^p\right)^{1/p} = \gamma \left(1 + \gamma t^p\right)^{1/p - 1} t^{p-1}$ para $p > 1$, seque que $\limsup_n \|T y_n\|_1 = 0$. Ou seja, $\|T y_n - 0\|_1 \to 0$.

Note que, como X é reflexivo, a bola unitária é sequencialmente fracamente compacto. Então, qualquer sequência limitada (x_n) em X contem uma subsequência (x_{n_k}) fracamente convergente. Pelo anterior, (x_{n_k}) converge na norma. Ou seja, T é compacto.

Questão 3. (**3p+1.5p**) Seja $K \subset \mathbb{C}$ compacto e $X = C(K, \mathbb{C})$, o espaço das funções contínuas munido com $\|f\| := \sup_{z \in K} |f(z)|$. Para $\varphi \in X$, define $T_\varphi : X \to X$ por $T_\varphi(f)(z) = \varphi(z) f(z)$.

a) Determine o espectro de T_φ.
b) Determine o espectro pontual e o espectro contínuo de T_φ.

Dica. $T_\varphi - \lambda \,\mathrm{id} = T_{\varphi - \lambda}$

Solução 3. a) Ao primeiro, discutiremos quando T_φ é bijetor.

Ao primeiro, note que $T_\varphi(f)(z) = T_\varphi(g)(z)$ se e somente se $\varphi(z)(f(z) - g(z))$. Daí, a ação de T_φ é injetor em $C(\{z : \varphi(z) \neq 0\}, \mathbb{C})$. Em particular, se $\{z : \varphi(z) \neq 0\}$ é denso em K, T_φ é injetor.

Porém, se $\{z : \varphi(z) \neq 0\}$ contém um aberto U, então para qualquer função f com $\mathrm{supp}(f) \subset U$, tem-se que $T_\varphi(f) = 0$. Como tais funções sempre existem, T_φ não é injetor neste caso.

Daí, para ver se T_φ é bijetor, basta analisar o caso $\{z : \varphi(z) \neq 0\}$ denso em K. Se $\{z : \varphi(z) = 0\} = \emptyset$, então $\inf_{z\in K} |\varphi(z)| > 0$ implica que $1/\varphi \in X$ e, em particular, $T_\varphi^{-1} = T_{1/\varphi}$ é um operador bem-definido em X.

Do outro lado, se $N := \{z : \varphi(z) = 0\} \neq \emptyset$, então $T_\varphi(X) \subset \{f \in X : f|_N = 0\} \neq X$. Ou seja, T_φ não é inversível.

Daí, pelo anterior e o fato que $T_\varphi - \lambda\,\mathrm{id} = T_{\varphi-\lambda}$,

$$\begin{aligned}\sigma(T_\varphi) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T_\varphi - \lambda\,\mathrm{id} \text{ não é inversível}\}\\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T_{\varphi-\lambda} \text{ não é inversível}\} = \varphi(K).\end{aligned}$$

b) Pelo anterior, $T_\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ não é injetor se $\{z : \varphi(z) = \lambda\}$ contém um aberto. Ou seja,

$$\sigma_p(T_\varphi) = \{\lambda : \exists U \text{ aberto com } \varphi(U) = \{\lambda\}\}.$$

Basta analisar o caso $N := \{z : \varphi(z) \neq \lambda\} \neq \emptyset$ e denso. Neste caso, como $T_{\varphi-\lambda}(X) \subset \{f \in X : f|_N = \lambda\}$, segue que para qualquer $c \neq \lambda$, existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$\{f \in X : \|f - c\| < \epsilon\} \cap T_{\varphi-\lambda}(X) = \emptyset.$$

Ou seja, $\sigma_c(T_\varphi) = \emptyset$.