2ª Prova - Analise Funcional

4 de julho de 2024
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Questão 1. (**3p**) Seja X um espaço de Banach real de dimensão infinita. Mostre que o fecho fraco de $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ é igual a $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

Solução 1. Seja $S : \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Note que uma vizinhança fraca de um ponto $x \in X$ tem a forma

$$\{y \in X : |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon \text{ para } i = 1, \ldots, n\},$$

para $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $f_1, \ldots, f_n \in X^*$. Daí, $x \in \overline{S}$ se e somente se, para cada $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e $f_1, \ldots, f_n \in X^*$, existe $y \in S$ tal que $|f_i(x) - f_i(y)| = |f_i(x - y)| < \epsilon$ para $i = 1, \ldots, n$.
Como ϵ é arbitrária, é equivalente a $x - y \in \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i)$. Porém, como $\dim X = \infty$,

$$V := \bigcap_{i=1}^{n} \ker(f_i) \neq \{0\}$$

pois os núcleos tem codimensão 1.
Daí, basta analisar a interseção de $\{x\} + \bigcap_{i=1}^n \ker(f_i) \neq \{0\}$ com S. Ao primeiro, se $\|x\| \leq 1$, segue do fato que V é ilimitado que existe $v \in V$ tal que $\|x + v\| > 1$. Por continuidade, existe um $t \geq 0$ tal que $\|x + tv\| = 1$. Ou seja, obtemos que $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ está contido no fecho fraco de S.
Suponhe que $\|x\| > 1$. Pela separação de Hahn-Banach de conjuntos convexos, existe $f \in X^*$ separando $\{x\}$ e $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$: $f(x) > \sup\{y : \|x\| \leq 1\}$. Em particular, existe um $\epsilon > 0$ tal que $f(x) - f(y) > \epsilon$ para qualquer $x \in S$.

Questão 2. (**2p + 0.5p + 1.5p**) Seja $X = \ell^2(\mathbb{N})$ e $T : X \to X$, $(x_1, x_2, ...) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2/2, x_4 - x_3/3, \ldots)$.

a) Mostre que T é um operador de Fredholm.
b) Determine $\ker X$.
c) Determine X/TX.

Solução 2. a) Vamos usar o teorema de Riesz para mostrar que T é Fredholm:

Argumento direto (ou de Arzela-Ascoli). Seja $S((x_1, x_2, ...)) := (0, x_1, x_2/2, ...)$ e $(x^{(n)})$ um sequencia em X com $\|x^{(n)}\| \leq 1$. Então, pelo argumento diagonal do Cantor, existe uma subsequencia $(n_k) \nearrow \infty$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$, $\lim_{k\to\infty} x_i^{(n_k)} =: x_i$ existe. Em particular, para cada $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$, existe K tal que $|x_i - x_i^{(n_k)}| < \epsilon$ para qualquer $i \leq N$ e $k \geq K$. Portanto, para $l,k \geq K$

$$\begin{aligned}\|S(x^{(n_k)}) - S(x^{(n_l)})\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i^{(n_k)} - x_i^{(n_l)}|^2}{i^2} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N} \frac{\epsilon^2}{i^2} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{|x_i^{(n_k)} - x_i^{(n_l)}|^2}{i^2} \leq (\sum i^{-2})\epsilon^2 + \frac{1}{N^2}.\end{aligned}$$

Ou seja, $T(x^{(n_k)})$ é sequencia de Cauchy. Ou seja, S é compacto. Ou, pelo teorema de Riesz, T é Fredholm.

Argumento alternativo (usando que o conjunto dos operadores compactos é fechado). Seja $S_n((x_1, x_2, ...)) := (0, x_1, x_2/2, ..., x_n/n, 0, ...)$. Então, S_n é compacto, sendo um operador de posto finito (i.e., $\dim(S_n(X)) < \infty$). Além disso, para $n > m$,

$$\|S_n((x_i)) - S_m((x_i))\|^2 = \sum_{i=n+1}^{m} |x_i|^2/i^2 \leq \|(x_i)\|^2/(n+1)^2.$$

Ou seja, $\|S_n - S_m\| \leq 1/(n+1)$ e (S_n) é uma sequência de Cauchy. Como o espaço dos operadores compactos é fechado, $\lim S_n = S$ é compacto. Ou, pelo teorema de Riesz, $T = \mathrm{Id} - S$ é Fredholm.

b) Para determinar o núcleo, note que

$$\ker(T) = \{(x_i) : T(x_i) = 0\} = \{(x_i) : x_1 = 0, x_2 = x_1, 2x_3 = x_2, \ldots\} = \{0\}.$$

c) Pela parte (b), T é injetor. Daí, pelo teorema espectral para operadores compactos, 1 não pretence ao espectro de S. Ou seja, $\mathrm{Id} - S = T$ é bijetor. Então, $TX = X$.

Argumento alternativo. Vamos agora determinar a classe de equivalência de 0 em X/TX. Note que $x \sim 0$ se e somente se $\exists z \in X$ tal que $x = Tz$. Para determinar z, note que $x_1 = z_1$ e $x_i = z_i - z_{i-1}/(i-1)$, para $i > 0$. Em particular,

$$x_1 = z_1, \quad x_2 = z_2 - z_1 \iff z_2 = x_2 + x_1, \quad x_3 = z_3 - z_2/2 \iff z_3 = x_3 + (x_2 + x_1)/2.$$

Para obter uma identidade para n arbitrário, suponhe que

$$z_n = x_n + \frac{x_{n-1}}{n-1} + \frac{x_{n-2}}{(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{x_2 + x_1}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-1-k)!}{(n-1)!} x_{n-k} + \frac{1}{(n-1)!} x_1.$$

Então, como $x_i = z_i - z_{i-1}/(i-1)$,

$$z_{n+1} = x_{n+1} + \frac{x_n}{n} + \frac{x_{n-1}}{n(n-1)} + \frac{x_{n-2}}{n(n-1)(n-2)} + \cdots + \frac{x_2 + x_1}{n!}.$$

Então, se $x_n = 0$ para qualquer $n > N$, segue da forma explicita acima que $(z_n) \in X$ e que $T(z) = x$. Como $\{(x_i) : \exists N \text{ t.q. } x_i = 0 \forall i > N\}$ é denso em X, $T(X)$ é denso em X. Mas como T é Fredholm, TX é fechado. Ou seja, $TX = X$. Daí, $X/TX = \{0\}$.

Questão 3. (**0.5p + 1.5p + 1.5p**) Seja X um espaço de Hilbert, $U : X \to X$ uma isometria sobrejetora, $E := \{x \in X : Ux = x\}$ e $P_E : X \to E$ a projeção ortogonal a E.

a) Mostre que $H = \{x - Ux + y : x \in X, y \in E\}$ é denso.

b) Mostre que, para qualquer $x \in X$,

$$\left\| \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i(x) \right) - P_E(x) \right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

c) Mostre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \left(\sum_{i=0}^{n-1} U^i \right) - nP_E \right\| < \infty$$

se 1 não é elemento do espectro do operador $T|_{E^\perp}$.

Solução 3. a) Seja $z \in H^\perp$. Então, $\langle z, x - Ux\rangle = 0$ para qualquer $x \in X$. Então,

$$\langle z, x - Ux\rangle = 0 \iff \langle z, x\rangle = \langle z, Ux\rangle \iff \langle z, x\rangle = \langle U^* z, x\rangle,$$

para qualquer $x \in X$. Ou seja, como o dual separa pontos, $U^* z = z$. Como $U^*U = \mathrm{id}$, $Uz = z$. Ou seja, $z \in E$ e H é denso.

b) Para $x \in X$, $y \in E$ e $z := x - Ux + y$ (i.e. $z \in H$), note que

$$\langle x - Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle Ux, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle Ux, Uy\rangle = 0.$$

Daí, $P_E(z) = y$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i(z) - P_E(z)\| &= \|\frac{1}{n}(x - U^n(x)) + y - y\| \\ &\le \frac{1}{n}(\|x\| + \|U(x)\|) \le \frac{2}{n}\|x\| \end{aligned}$$

Daí, a afirmação vale em H. Agora, suponha que $z \in H$ e $x \in X$. Então, como U é isometria e P_E é contração

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} U^i(z - x) - P_E(z - x)\| &\le \frac{1}{n} \sum_i \|U^i(z - x)\| + \|P_E(z - x)\| \\ &\le 2\|z - x\|.\|\frac{1}{n}(x - U^n(x)) + y - y\|. \end{aligned}$$

Daí, a afirmação vale em H, tomando o limite $z \to x$.

c) Ao primeiro, note que $E^\perp$ é invariante sob U pois o produto interno é U-invariante. Suponha que $1 \notin S(E^\perp)$. Então, $U - \mathrm{id}$ é inversível. Em particular, existe $C > 0$ tal que $\|Ux - x\| \ge C\|x\|$ para qualquer $x \in E^\perp$. Usando o estimativo acima, obtém-se que

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} U^i(Ux - x) - nP_E(Ux - x) \right\| = \left\| (U^n(x) - x) \right| \le 2\|x\| \le \frac{2}{C}\|Ux - x\|.$$

Basta analisar o caso $x \in E$ e juntar os estimativos.