$2^{\underline{a}}$ Chamada - Analise Funcional

16 de julho de 2024
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Questão 1. (**2.5p**) Seja X um espaço de Banach e V, W subespaços fechados tal que $V \oplus W = X$. Para $v \in V$ e $w \in W$, define $P(v+w) = v$ e $Q(v+w) = w$. Mostre que P, Q são operadores limitados.

Solução 1. Suponha que $(x_n, P(x_n)) \to (x, y)$. Em particular, se $x_n = v_n + w_n \in V \oplus W$, então $P(x_n) = v_n \xrightarrow{n\to\infty} x$. Como V é fechado, $x \in V$.
Daí, $w := \lim(y - x_n) = \lim w_n$ existe. Ou seja, $P(y) = P(v + w) = v$. Daí, pelo gráfico fechado, P é contínua.

Questão 2. (**2p**) Seja (x_n) um sequencia em um espaço de Hilbert X. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ se e somente se $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ e $x_n \rightharpoonup x$ fracamente.

Solução 2. Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ pela continuidade da norma e, para qualquer $f \in X^*$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ pela continuidade de f.
Do outro lado, se $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, então

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \overline{\langle x, x_n\rangle} + \|x\|.$$

Porém, pelo teorema de Riesz, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ é um elemento de X^*. Daí,

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \overline{\langle x, x_n\rangle} + \|x\| \xrightarrow{n\to\infty} 2\|x\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \overline{\langle x, x_n\rangle} = 0.$$

Questão 3. (**3p**) Seja μ uma medida finita, $\varphi : X \to \mathbb{C}$ uma função limitada e mensurável, e $T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ o operador limitado definido por $T(f)(x) = f(x)\varphi(x)$. Determine o espectro pontual, residual e o espectro contínuo de T. [1]

Dica. Teorema da convergância monótona.

Solução 3. Basta considerar o caso $\lambda = 0$. Note que T é injetor se e somente se

$$\ker(T) = \{f : Tf = 0 \text{ q.t.p}\} = \{f : f(x) = 0 \text{ para q.t.p. } x \text{ tal que } \varphi(x) = 0\}.$$

Ou seja, $\ker T = 0$ se e somente se $\mu(\{x : \varphi(x) = 0\}) = 0$. Então,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(T) = \{\lambda : \mu(\{x : \varphi(x) = \lambda\}) > 0\}.$$

[1] λ é no espectro pontual se $T_\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ não é injetor, λ é no espectro residual se $T_\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ é injetor e $(T_\varphi - \lambda)(X)$ não é denso em X, e λ é no espectro contínuo se $T_\varphi - \lambda\,\mathrm{id}$ é injetor e $(T_\varphi - \lambda)(X)$ é denso em X

Agora, suponha que $\mu(\{x : \varphi(x) = 0\}) = 0$. Então, pelo teorema da convergência monotona,

$$\mu\{x : |\varphi(x)| < \epsilon\} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0.$$

Daí, por mais uma aplicação do teorema da convergência monotona, para $f \in L^2(\mu)$,

$$\|f - f\mathbf{1}_{\{|\varphi|>\epsilon\}}\|_2^2 = \|f\mathbf{1}_{\{|\varphi|\le\epsilon\}}\|_2^2 = \int |f|^2 \|f\|_2 \mathbf{1}_{\{|\varphi|\le\epsilon\}} d\mu \xrightarrow{\epsilon \to 0} \int 0 d\mu = 0.$$

Então, para qualquer $f \in L^2(\mu)$ e $\epsilon > 0$, existe $g \in L^2(\mu)$ e $\delta > 0$ tal que $\|f - g\|_2 < \epsilon$ e $g = g\mathbf{1}_{\{|\varphi|>\delta\}}$.
Além disso, $T(h) = g$ para

$$h := \mathbf{1}_{\{|\varphi|>\delta\}} g \varphi^{-1}.$$

Como $|h| \le \delta^{-1}|g(x)|$, $h \in L^2(\mu)$. Em particular, $\sigma_{\mathrm{r}}(T) = \emptyset$ e, se $\mu(\{|\varphi| > \delta\}) = 0$ para um $\delta > 0$, então T é inversível. Segue que

$$\sigma_{\mathrm{c}}(T) = \{\lambda : \mu(\{x : |\varphi(x) - \lambda| < \delta\|\} > 0 \forall \delta > 0), \mu(\{\varphi = \lambda\}) = 0\}.$$

Questão 4. (**2.5p**) Seja X um espaço de Hilbert separável e $T : X \to X$ limitado. Mostre que existe um sequencia de operadores ($T_n : X \to X$) de posto finito[2] tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0 \text{ para qualquer } x \in X.$$

Solução 4. Como X é separável, existe uma base ON $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Define $V_n := \mathrm{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$.
Como $\dim V_n < \infty$, $X = V_n \oplus V_n^\perp$. e a projeção ortogonal $P_n : X \to V_n$ é bem definido.
Define $T_n := P_n \circ T$. Daí, para $x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - T(x)\| \le \|T\| \lim_{n\to\infty} \|x - P(x_n)\| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sum_{k>n} |\langle e_k, x\rangle|^2} = 0.$$

e
Se $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ pela continuidade da norma e, para qualquer $f \in X^*$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ pela continuidade de f.
Do outro lado, se $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, então

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \overline{\langle x, x_n\rangle} + \|x\|.$$

Porém, pelo teorema de Riesz, $y \mapsto \langle x, y\rangle$ é um elemento de X^*. Daí, por Bessel,

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \overline{\langle x, x_n\rangle} + \|x\| \xrightarrow{n\to\infty} 2\|x\|^2 - \langle x, x_n\rangle - \overline{\langle x, x_n\rangle} = 0.$$

Além disso, T_n é de posto finito pois $T_n(X) \subset V_n$.

[2] T é de posto finito se $\dim T(X) < \infty$