## Bases ortonormais

**Def:** Seja $X$ espaço de Hilbert. Então, $\underline{x \perp y}$ para $x, y \in X$ se $\langle x, y \rangle = 0$. Seja $M \subset X$. Então

$$M^{\perp} := \{ x \in X : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in M \}$$

é o <u>complemento ortogonal</u> de $M$.

$\{e_i : i \in J\} \subset X$ é <u>ortonormal</u> se

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : i \neq j. \end{cases}$$

<u>Exemplos</u>. (i) $X = \mathbb{K}^n$, $\{(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots), \ldots\}$ é ON.

(ii) $X = \{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \mid f(0) = f(2\pi), \int |f|^2 dx < \infty \}$

$e_n := e^{inx}/c_n$, $n \in \mathbb{Z}$ é <u>ON</u>.

(iii) $X$ como acima, $M = \{$ funções constantes $\}$. Daí,

$$\int_0^{2\pi} f \cdot c \, dx = 0 \iff c \int_0^{2\pi} f \, dx = 0$$

$$\iff \int f = 0.$$

$$\Rightarrow M^{\perp} = \{ f \in X : \int_0^{2\pi} f \, dx = 0 \}$$

<u>Observação</u>. Se $x \perp y$, então $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.

<u>Proposição</u>. Seja $M \subset X$ ($X$ Hilbert) fechado. Então,

$M \cap M^{\perp} = 0$ e $M + M^{\perp} = X$.

<u>Prova</u>.

① Suponha que $x \in M \cap M^{\perp} \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

② <u>Basta</u> mostrar que $M + M^{\perp} = X$:

Para mostrar isto, há várias abordagens: lei do paralelogramo (Olhe-te), convexidade uniforme ou Representação de Riesz.

Riesz: Seja $y \in X \Rightarrow x \mapsto \langle x, y\rangle \in M^*$. Como $M$ é fechado, $M$ é Hilbert e existe $\hat{y} \in M$ : $\langle x, y\rangle = \langle x, \hat{y}\rangle$ $\forall x \in M$.

$\Rightarrow y - \hat{y} \in M^\perp$

$\Rightarrow y = \hat{y} + y - \hat{y} \in M + M^\perp$ $\square$

Provas alternativas: Convexidade ou lei do paralelogramo (Oliveira).

Os espaços de Hilbert são os mais próximos aos espaços de dim finita pois há bases ortonormais. Para defini-los em espaços não separáveis, precisa-se de um pouco cuidado:

Def. $\{x_i : i \in I\}$ é somável em relação com $x \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $J \subset I$ finito tal que

$$\|x - \sum_{i \in \tilde{J}} x_i\| \leq \varepsilon$$

$\forall \tilde{J} \supset J$ finito (obviamente, a definição é feita para evitar falar sobre sequências generalizadas).

Neste caso, ~~x~~ é unicamente determinado e escrevemos

$$x = \sum_{i \in I} x_i.$$

Observações: Queremos que $I$ pode ser não-enumerável, mas $x_i \neq 0$ para um conjunto enumerável de $i$.

Proposição: São equivalentes:

(1) ~~[illegible] é somável~~ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists J_\varepsilon$ finito tal que

$$\|\sum_{i \in J} x_i\| < \varepsilon \quad \forall J \text{ finito}, J \cap J_\varepsilon = \emptyset$$

(2) $\{x_i \in I\}$ é ~~somável~~

(3) $\exists J \subset I$ enumerável tal que $x_i = 0$ $\forall i \notin J$ e

$$x = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (J \cong \mathbb{N}).$$

**Prova** (2 ⇒ 1): Seja $\{x_i\}$ somável, $x = \sum x_i$. Então $\exists\, J_\varepsilon$:

$$\Big\| \sum_{i\in J} x_i - x \Big\| < \varepsilon \qquad \forall\, J \supset J_\varepsilon \text{ fin.}$$

$\Rightarrow$ Para $J$ finito com $J \cap J_\varepsilon = \emptyset$:

$$\varepsilon > \Big\| \sum_{i\in J\cup J_\varepsilon} x_i - x \Big\| \geq \Big\| \sum_{i\in J} x_i \Big\| - \underbrace{\Big\| \sum_{i\in J_\varepsilon} x_i - x \Big\|}_{<\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \Big\| \sum_{i\in J} x_i \Big\| < 2\varepsilon$$

(1 ⇒ 2) Escolha $(J_n)$ tal que para $J \cap J_n = \emptyset$, $J$ finito:

$$\Big\| \sum_{J} x_i \Big\| < \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow$ $\sum_{i \in \bigcup_{k=1}^{n} J_k} x_i$ é sequência de Cauchy com limite $\underline{\underline{x}}$.

Aqui: a parte central é construir $x$.

Basta repetir o argumento de cima. □

(2 ⇔ 3) Ex.

**Corolários** (1) Suponha que $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ são somáveis, $\alpha \in \mathbb{K}$. Então

$$\sum \alpha x_i = \alpha \sum x_i, \qquad \sum x_i + y_i = \sum x_i + \sum y_i, \qquad \Big\langle \sum x_i, z\Big\rangle = \sum \langle x_i, z\rangle.$$

(2) Suponha que $\{x_i\}$ é família com $\langle x_i, x_j\rangle = 0$ $\forall\, i \neq j$.

Então $\{x_i\}$ somável $\Leftrightarrow$ $\sum \|x_i\|^2$ somável em $\mathbb{R}$.

Além disso, neste caso temos que $\|\sum x_i\|^2 = \sum \|x_i\|^2$.

**Prova** (1) é óbvio pois vale para somas finitas.

(2) Seja $J \subset I$ finito. Por Pitágoras:

$$\sum_{i\in J} \|x_i\|^2 = \Big\| \sum_{i\in J} x_i \Big\|^2$$

Ou seja $\{x_i\}$ somável em $X$ $\Leftrightarrow$ $\{\|x_i\|^2\}$ somável em $\mathbb{R}$.

Além disso, para $x = \sum x_i$

$$\langle x, x\rangle = \sum_i \langle x_i, x\rangle = \sum_j \sum_i \langle x_i, x_j\rangle = \sum_i \langle x_i, x_i\rangle$$
$$= \sum \|x_i\|^2. \qquad □$$

Teorema. Seja $\{x_i\}$ ON. Então,

① $\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in X$ (BESSEL)

② $\sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 = \|x\|^2 \iff x = \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle x_i$

(PARSEVAL).

Prova.

① Seja $J \subset I$ finito. Então, para $i \in J$

$$\left\langle x - \sum_{j\in J} \langle x, x_j\rangle x_j,\ x_i \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x - \sum_J \langle x, x_j\rangle x_j \in \operatorname{span}\{x_i : i \in J\}^\perp$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left\| x - \sum_J \langle x, x_j\rangle x_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_J \langle x, x_j\rangle^2$$

$\Rightarrow$ Bessel.

② $$\left\| x - \sum_{i\in I} \langle x, x_i\rangle x_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i\in I} |\langle x, x_i\rangle|^2 = (*)$$

pelo mesmo argumento. Daí,

$$(*) = 0 \iff x = \sum \langle x, x_i\rangle x_i \qquad \square$$

Construção da soma direta de espaços de Hilbert

Seja $\{X_i : i \in I\}$ uma família de espaços de Hilbert. Então

$$\sum_{i\in I} X_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i \text{ e } \sum_{i\in I} \|x_i\|^2 \text{ somável} \right\},$$

munido com

$$\langle (x_i), (y_i) \rangle := \sum_{i\in I} \langle x_i, y_i \rangle$$

é a soma direta de $\{X_i : i \in I\}$.

Teorema. $\sum_{i\in I} X_i$ é espaço de Hilbert.

Prova. Para $\{x_i\}, \{y_i\}$ obtém-se, pelas propriedades de $\ell^2$:

CS em $\ell^2$: $\{\|x_i\| \|y_i\|\}$ é somável

CS e $X_i$: $|\langle x_i, y_i\rangle| \leq \|x_i\| \|y_i\|$

$\Rightarrow \{\langle x_i, y_i\rangle : i \in I\}$ somável.

$\Rightarrow \langle \{x_i\}, \{y_i\}\rangle := \sum_i \langle x_i, y_i\rangle$ é bem definido

Além disso, é straightforward verificar que é sesquilinear e pos. semi-def.

Basta mostrar que é prod. interno e completo.

① $\langle \{x_i\}, \{x_i\}\rangle = 0 \iff \sum_i \|x_i\|^2 = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$.

② Se $\{x_i^{(n)}\}$ é Cauchy, então $(x_i^{(n)})_n$ é Cauchy $\forall i$.

Seja $x_i^{(\infty)} := \lim_n x_i^{(n)}$.

Pela condição de Cauchy para $\{x_i\}$: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$:

$\sum_{i \in I} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|^2 < \varepsilon \quad \forall n, m > N$.

Daí, para cada $J \subset I$ finito:

$$\varepsilon > \sum_{j \in J} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|^2 \xrightarrow{m \to \infty} \sum_{i \in J} \|x_i^{(n)} - x_i^{(\infty)}\|^2$$

$\Rightarrow \{x_i^{(n)} - x_i^{\infty}\}_{i \in I} \in \sum X_i$ e $\{x_i^{(n)}\} \longrightarrow \{x_i^{(\infty)}\}$. $\square$

Agora vamos caracterizar bases ON

Teorema. Seja $X$ Hilbert e $\{x_i\}_{i\in I}$ ortonormal. Então são equivalentes:

① $\{x_i\}_{i \in I}$ é maximal pela inclusão

② Se $\langle x, x_i\rangle = 0 \ \forall i \Rightarrow x = 0$

③ $X \cong \sum_{i \in I} \mathbb{K} \cdot x_i$, e $\cong$ é isometria.

④ $\forall x \in X$: $x = \sum \langle x, x_i\rangle x_i$ (Fourier)

⑤ $\forall x, y \in X$:
$\langle x, y\rangle = \sum_i \langle x, x_i\rangle\langle x_i, y\rangle$

⑥ $\forall x \in X$: $\|x\|^2 = \sum |\langle x, x_i\rangle|^2$. (Parseval)

Prova.

$1 \Rightarrow 2$: Suponha que $\exists\, x \neq 0$ com $x \perp x_i \ \forall i$

$\Rightarrow \{x_i\} \cup \{\frac{1}{\|x\|} x\}$ ON

$2 \Rightarrow 3$: $\Phi : \sum_i \mathbb{K} x_i \longrightarrow X$, $\{\lambda_i\} \longmapsto \sum \lambda_i x_i$

é linear e preserva o produto interno

$\Rightarrow \Phi$ é isometria.

$\Rightarrow \Phi(\sum \mathbb{K} x_i) \subset X$ fechado e

$\Phi(\sum \mathbb{K} x_i) = X \iff \Phi(\sum \mathbb{K} x_i)^\perp = \{0\}$ (ver 2).

$3 \Rightarrow 4$, $4 \Rightarrow 5$ e $5 \Rightarrow 6$ são óbvias.

$6 \Rightarrow 1$: suponha que $\{x_i\}$ não é max. $\Rightarrow \exists\, x : x_i \perp x \ \forall i$, $\|x\| = 1$.

$\Rightarrow \|x\|^2 = \sum |\langle x, x_i \rangle|^2 = 0$ ↯ $\square$

## O adjunto de Hilbert e o teorema de Lax-Milgram

<u>Proposição</u>: Seja $X, Y$ espaços de Hilbert e $A: X \to Y$ limitado. Então, existe um único operador $A^*: Y \to X$ tal que $\langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle$ $\forall x, y$.

<u>Def</u>. $A^*$ é o <u>adjunto</u> (de Hilbert) de $A$.

<u>Prova</u>. Lembre que, por Riesz, $\iota_X : X \to X^*$ e $\iota_Y : Y \to Y^*$ são isometrias sobrejetoras. Seja $A' : Y^* \to X^*$. Daí:

$$\langle x, A^* y \rangle = \langle Ax, y \rangle \iff \iota_X(A^* y)(x) = \iota_Y(y)(Ax) \quad \forall x, y$$

$$\iff \iota_X(A^* y) = \iota_Y(y) \circ A = A' \circ \iota_Y(y) \quad \forall y$$

$$\iff A^* = \iota_X^{-1} \circ A' \circ \iota_Y$$

$\square$

Ou seja, $A^*$ é unicamente determinado.

<u>Corolário da prova</u>. O mapa

$$* : L(X,Y) \to L(Y,X), \quad A \mapsto A^*$$

é uma isometria antilinear (i.e. $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$) e $A^{**} = A$

Lax-Milgram

<u>Lema</u>. $\|A\| = \sup \{ |\langle Ax, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1 \}$.

Prova do Lema: Suponha que $\|x\| = \|y\| = 1$

(1) $|\langle Ay, x\rangle| \leq \|Ax\| \|y\| \leq \|A\|$.

(2) Suponha que $|\langle Ay, x\rangle| \leq c \quad \forall \|x\| = \|y\| = 1$.

$\Rightarrow |\langle Ay, Ay\rangle| \leq c \|Ay\|$

$\Rightarrow \|Ay\|^2 \leq c\|Ay\| \Rightarrow \|Ay\| \leq c$

$\Rightarrow \|A\| \leq c$, como $y$ é arbitrário. $\square$

Lema: Suponha que $|\langle A\cancel{x}, x\rangle| \leq d\|x\|^2 \quad \forall x$. Então, $\forall x, y$:

(i) $|\langle Ax, y\rangle + \langle x, Ay\rangle| \leq 2d \|x\| \|y\|$ $\quad$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(ii) $|\quad " \quad| + |\quad " \quad| \leq \quad "$ $\quad$ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Prova. Note que

$$|\langle A(x+y), (x+y)\rangle - \langle A(x-y), (x-y)\rangle|$$

$$= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle + \langle Ay, y\rangle - \langle Ax, x\rangle -$$

$$= 2\langle Ax, y\rangle + 2\langle Ay, x\rangle$$

"Daí, pela hipótese e a lei do paralelogramo:

$$2|\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle| \leq d\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right)$$

$$\leq 2d\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Note que i, ii valem para $y = 0$.

Para verificar i, escolha $a := \|x\|/\|y\|$, e, s.p.d.g, $x \neq 0$:

$$|\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle| = |\langle A(a^{-1}x), ay\rangle + \langle A(ay), a^{-1}y\rangle|$$

$$\leq d\left(a^{-2}\|x\|^2 + a^2\|y\|^2\right) = 2d \|x\|\|y\|.$$

Para verificar (ii), basta escolher $\theta, \sigma$ tal que $e^{i\theta}\langle A e^{i\sigma}, y\rangle + e^{i\theta}\langle Ay, e^{i\sigma}x\rangle > 0$.

Corolário: Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\langle Ax, x\rangle = 0 \ \forall x$, então $A = 0$.

Prova. Se $\langle Ax, x\rangle = 0$, então $|\langle Ax, y\rangle| = 0 \quad \forall x, y$
$\Rightarrow \|Ax\| = 0 \quad \forall x$ $\square$

— Antes de discutir as implicações básicas, provamos o teorema de Lax-Milgram.

Teorema: Seja $b : X \times X \to \mathbb{K}$ ($X$ Hilbert) uma forma sesquilinear, e suponha que $c := \inf \{|b(x,x)| : \|x\| = 1\} > 0$.
Então, existe $S : X \to X$ tal que

$$\langle x, y\rangle = b(x, Sy) \quad \forall x, y \in X.$$

Prova. Como $b$ é sesquilinear, $x \mapsto b(x,y) \in X^*$. Daí, existe um único $y^* \in X$ tal que $b(x,y) = \langle x, y^*\rangle$. Resta definir $Ty = y^*$ e repetir o argumento anterior.

$$\Rightarrow b(x,y) = \langle x, Ty\rangle \quad \forall x, y$$

Passo: $c\|x\|^2 \leq |b(x,x)| \leq \|x\| \, \|Tx\| \leq \|T\| \, \|x\|^2$.
Agora, é fácil ver que $T$ é inversível. Além disso, se $(y_n)$ é Cauchy em $T(X)$, então $\exists! (x_n) \in X$ com $Tx_n = y_n \ \forall n$ e

antes

$$\|y_n - y_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \geq c\|x_n - x_m\|$$

$\Rightarrow (x_n)$ é Cauchy $\Rightarrow T(x_n) \to T(\lim (x_n))$.

$\Rightarrow T(X)$ fechado. ($\Rightarrow T^{-1} : TX \to X$ é limitado.)

Para $y \in T(X)^\perp$:

$$c\|y\|^2 \leq |b(y,y)| = |\langle y, Ty\rangle| = 0$$

$\Rightarrow y = 0$

Ou seja: $TX = X$, e $T^{-1} : X \to X$ é limitado. Daí:

$$\langle x, y\rangle = \langle x, T \circ T^{-1} y\rangle = b(x, T^{-1}y) \quad \forall x, y. \quad \square$$

Usando os lemas pode-se analisar a classe seguinte:

<u>Def.</u> Seja $X$ Hilbert. Então, $T: X \to X$ é autoadjunto $\iff T = T^*$. Além disso, $T$ é normal se $TT^* = T^*T$.

<u>Contraexemplo.</u> Suponha que $\langle x, y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle$ $\forall x, y$, ~~Então~~ ou seja, $T$ preserva $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

<u>Neste caso.</u> $\langle x, y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle = \langle T^*Tx, y \rangle$

$\Rightarrow \langle T^*Tx - x, y \rangle = 0 \ \forall x, y$

$\Rightarrow T^*T = id \Rightarrow T$ normal

<u>Em geral:</u>

$$\begin{array}{c} \{\text{normal}\} \supset \{\text{Isometrias}\} \ \cancel{\{\ldots\}} \\ \cup \\ \{\text{autoadjunto}\} \end{array}$$

<u>Uma consequência dos Lemas em cima:</u>

<u>Fato 1</u> Seja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Então, $A$ autoadj. $\iff \langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} \ \forall x$.

<u>Prova.</u> Se $A = A^*$, então $\langle Ax, \cancel{y} \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$.

Se $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} \ \forall x$, então $\langle Ax, x \rangle = \langle A^*x, x \rangle$

$\Rightarrow \langle (A^* - A)x, x \rangle = 0 \ \forall x \Rightarrow A^* = A$ $\square$

<u>Fato 2.</u> Seja $A$ autoadjunto, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Então

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2} = d$$

<u>Prova:</u> Por Cauchy-Schwarz, $|\langle Ax, x \rangle| \leq \|A\| \|x\|^2$. Pelo Lema anterior,

$$2|\langle Ax, x \rangle| = |\langle Ax, \cancel{y} \rangle + \langle x, A\cancel{y} \rangle|$$
$$= |\langle Ax, \cancel{x} \rangle + \langle x, A\cancel{x} \rangle| \leq 2d \|x\|^2 \quad \square$$

<u>Fato 3</u>: Suponha que $T$ é linear e $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \ \forall x, y$

$\Rightarrow T = T^*$ e $T$ é limitado.

(HELLINGER - TOEPLITZ) <u>Prova</u> ~~:~~ Ver P1.

Uma das grandes vantagens de operadores autoadjuntos é a ordem:

Def: Sejam $A, B$ autoadjunto. Dizemos que

$A \geq 0$ se $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \quad \forall \; x \in X$.

$A \geq B$ se $A - B \geq 0$.

Exemplo: $\dim X < \infty$, $A$ autoadjunto

$\Longleftrightarrow \exists$ base $\overset{ON}{\{e_i\}}$ de autovetores, com auto-valores $\lambda_i \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ Para $x = \sum x_j e_j$:

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j} \langle \lambda_i x_i e_i, x_j e_j\rangle = \sum \lambda_i x_i^2.$$

Ou seja $A \geq 0 \Longleftrightarrow \lambda_i \geq 0 \; \forall i$.

Por exemplo: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ tem autovalores $\pm 1$. $\Longrightarrow$ não é positivo.

Proposição: Seja $P$ operador limitado. Então são equivalentes:

(1) $P^2 = P$, $P = P^*$

(2) $\exists \; V \subset X$ fechado tal que $P|_V = id$, $P|_{V^\perp} = 0$.

Além disso, em ambos casos, $P \geq 0$.

Prova: (2) $\Rightarrow$ (1) é óbvio e (2) $\Rightarrow P \geq 0$ tb.

(1 $\Rightarrow$ 2) Defina $V := \ker(Id - P) = \{x : Px = x\}$, que é fechado. Além disso, temos que

$$x = P(x) + (Id - P)(x)$$

Como $P^2 = P$, $P(Px) = P(x) = P(P(x)) + \underbrace{P(Id - P)(x)}_{=0} = P(x)$.

$\Longrightarrow P(X) \subset V$. Além disso, para $y \in V$:

$$\langle y, (Id-P)x\rangle = \langle P(y), (Id-P)(x)\rangle = \langle y, (P-P)(x)\rangle = 0.$$

$\Longrightarrow \forall x \in X$, $Px \perp (Id-P)(x)$.

$\Longrightarrow X = V + V^\perp$, $V^\perp = (Id-P)(X)$.

O resto é simples. $\square$

Fato: Se $A \geq 0$, então $\langle A\cdot, \cdot\rangle$ é pos. semi-def. Em particular:

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \langle Ax, x\rangle \langle Ay, y\rangle \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

Teorema. Suponha que $A_i$ é sequência crescente e limitada de op. autoadj.

$A_i \geq A_{i-1}$ e $\exists B$ autoadjunto t.q. $B \geq A_i \ \forall i$

Então, $\exists A$ autoadjunto t.q. $A_i \longrightarrow A$ fracamente.

Prova: Pela hipótese, $\langle A_i x, x\rangle$ é crescente e limitada por $\langle Bx, x\rangle$. (e então convergente).

Suponha que $K = \mathbb{R}$. Usando o truque da lei do paralelogramo, para $T$ autoadjunto:

$$\langle B(x+y), x+y\rangle - \langle B(x-y), (x-y)\rangle$$

$$= \langle Bx, y\rangle + \langle By, x\rangle - \Big(-\langle By, x\rangle - \langle Bx, y\rangle\Big) = 4\langle Bx, y\rangle$$

(Para $K = \mathbb{C}$, temos uma soma de 4 termos).

$\Rightarrow$ Daí, $\lim_{i \to \infty} \langle A_i x, y\rangle$ existe $\forall x, y \in X$.

$\Rightarrow \forall y \in X \ \exists A_y : \lim_{i \to \infty} \langle A_i x, y\rangle = \langle A_y x, y\rangle$,

e, pela linearidade, $x \mapsto A_y x$ é limitada, autoadjunta.

Agora, suponha que $n > m$. Então

$$\langle (A_n - A_m)(x), \underbrace{(A_n - A_m)x}_{y}\rangle^2$$

$$\overset{CS}{\leq} \langle (A_n - A_m)(x), x\rangle \cdot \langle (A_n - A_m)^2 x, (A_n - A_m)x\rangle$$

$$\leq \langle (A_n - A_m)(x), x\rangle \cdot \|A_n - A_m\|^3 \cdot \|x\|^2$$

$A$ autoadjunto $\Rightarrow A \leq \|A\| \cdot Id_X$

$$\leq \langle (A_n - A_m)x, x\rangle \cdot \|x\|^2 \cdot (2\|B\|)^3 \xrightarrow{n,m \to \infty} 0$$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} A_n x =: Ax$ existe e não depende de $y$. $\square$

# Operadores em espaços de Banach – espectro, operadores compactos e operadores de Fredholm

**O espectro.** Seja $X$ Banach e $A : X \to X$ contínuo.

(1) $\xi \in \mathbb{K}$ é um valor regular se $A - \xi\, \mathrm{Id}$ é bijetora (e então, pela aplicação aberta, $(A - \xi\, \mathrm{id})^{-1}$ é contínua).

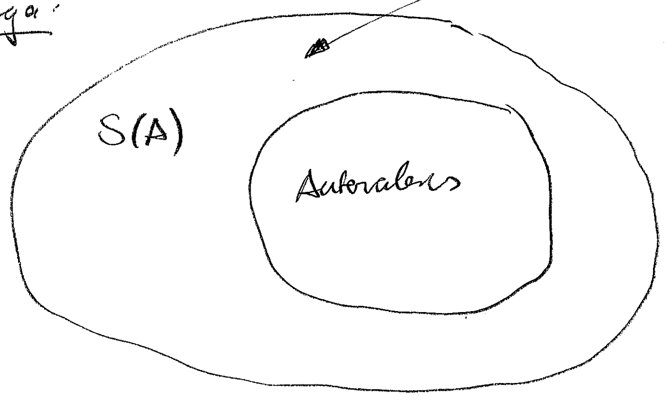
(2) $R(A) := \{\xi \in \mathbb{K} \mid \xi \text{ regular}\}$ é o conjunto resolvente.

(3) $\mathbb{K} \setminus R(A) = S(A)$ é o espectro de $A$.

(4) Se $\ker(A - \xi\, \mathrm{Id}) \neq 0$, então $\xi$ é autovalor de $A$ (em particular, existe $v \neq 0$ : $Av = \xi v$).

Ou seja:

$A - \xi\, \mathrm{id}$ injetora mas não sobrejetora.




Objetivo: Mostrar que $S(A)$ é compacto.

**Lema.** Suponha que $X, Y$ são espaços de Banach e $A, B : X \to Y$ limitados, $A$ bijetora.

Suponha que $\|A - B\| < \|A^{-1}\|^{-1}$

$\Rightarrow B$ bijetora.

Prova: $\mathbb{B} = A(\mathrm{Id} - A^{-1}(A - \mathbb{B}))$

Ideia: Utilizar a série geométrica para construir $(\mathrm{Id} - A^{-1}(A-\mathbb{B}))^{-1}$:

Pela hipótese, $\| A^{-1}(A - \mathbb{B}) \| < 1$

$$\Rightarrow T := \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}(A-\mathbb{B}))^n \text{ é uma série de Cauchy.}$$

Além disso, $(\mathrm{Id} - A^{-1}(A-\mathbb{B})) \sum_{n=0}^{\infty} (A^{-1}(A-\mathbb{B}))^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\quad)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (\quad)^n = \mathrm{Id}.$$

$$\Rightarrow TA^{-1} \cdot \mathbb{B} = TA^{-1} A (\mathrm{Id} - A^{-1}(A - \mathbb{B})) = \mathrm{Id}. \quad \square$$

Corolários: Seja $A: X \to X$ limitado.

① $R(A)$ é aberto

② $R(A) \to L(X,X)$, $\varsigma \longmapsto \underbrace{(A - \varsigma \mathrm{Id})^{-1}}_{= R_\varsigma}$ é analítica.

Prova. ① é óbvio

② Escolhe $\varsigma \in R(A)$. Como $R(A)$ é aberto e ~~pelo lema anterior~~, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\|A - \varsigma \mathrm{Id} - A - \eta \mathrm{Id}\| = |\varsigma - \eta| < \| R_\varsigma \|^{-1}$, $\forall |\varsigma - \eta| < \varepsilon$.

$$\overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow} R_\eta = \sum_{n=0}^{\infty} (R_\varsigma(-\varsigma + \eta))^n R_\varsigma$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} R_\varsigma^{n+1} (\eta - \varsigma)^n \quad \square$$

Obs: O raio de convergência de ↑ é $\|R_\varsigma\|^{-1}$.

$\Rightarrow \|R_\varsigma\| \longrightarrow \infty$ quando $\varsigma \longrightarrow S(A)$.

Teorema: Seja $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e $A : X \to X$ lin. Então,

$S(A) \neq \emptyset$ e $S(A)$ é compacto e $S(A) \subset \{z : |z| \leq \|A\|\}$.

Prova: Note que $T = -\varsigma\,\mathrm{Id}$ é inversível, e que $\|T^{-1}\|^{-1} = |\varsigma|$.

Vamos aplicar de novo o Lema:

$$\| A - \varsigma\,\mathrm{id} - T \| = \|A\|$$

Ou seja, se $|\varsigma| > \|A\|$, então $A - \varsigma\,\mathrm{Id}$ é bijetor $\Rightarrow \varsigma \in S(A)$

$\Rightarrow$ Daí, o espectro é compacto e contido em $\{z : |z| \leq \|A\|\}$.

(Observação: ainda não usamos o fato que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

A segunda parte use um resultado da análise complexa:

Suponha que $S(A) = \emptyset$. Então, $\varsigma \mapsto R_\varsigma$ é uniformemente limitada para $\varsigma \in \{z : |z| \leq 2\|A\|\}$. Porém, para $|z| \geq 2\|A\|$,

$$R_\varsigma = -\frac{1}{\varsigma}\left(\mathrm{Id} - \frac{1}{\varsigma}A\right)^{-1} = -\frac{1}{\varsigma}\sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^{-n}A^n$$

$$\Rightarrow \|R_\varsigma\| \leq \frac{1}{2\|A\|} \cdot \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{\|A\|}.$$

Ou seja $\|R_\varsigma\|$ é uniformemente limitado para $\varsigma \in \mathbb{C}$.

O truque sujo: Pelo teorema de ~~[illegible]~~ Liouville para espaços de Banach complexos, $R_\varsigma$ é uma função constante, que é absurdo.

O truque menos sujo:

Para qualquer $x \in X$ e $\varphi \in X^*$, $\xi \mapsto \varphi(R_\xi(x))$ é analítica $\Rightarrow$ a função é constante. Porém, pela condição anterior: $R_\xi \xrightarrow{|\xi| \to \infty} 0$

Daí, $\varphi(R_\xi(x)) = 0 \;\; \forall \; x \in X$ e $\varphi \in X^*$.

$\Rightarrow R_\xi = 0 \;\; \forall \; \xi \in \mathbb{C}$ ↯ $\square$

Teorema. Seja $A : X \to X$ limitado, $X$ espaço de Banach complexo. Então

$$\sigma(A) = \sup\{|\xi| : \xi \in S(A)\} = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leq \|A\|.$$

Prova. Seja $\xi \in \mathbb{C}$ e $\xi_1 - \xi_n$ as raízes $n$-ésimas de $\xi$ em $\mathbb{C}$. Daí,

$$A^n - \xi \, Id = \prod_{i=1}^{n} (A - \xi_i \, Id).$$

$\Rightarrow$ se $\xi \in S(A^n)$, então $\exists j : \xi_j \in S(A)$.

Do outro lado, se $\xi_j \in S(A)$ então:

(i) se $(A - \xi_j \, Id)$ não é injetora, então

$$\prod_{i \neq j} (A - \xi_i \, Id)(A - \xi_j \, Id) \text{ não é injetora}$$

(ii) se $(A - \xi_j \, Id)$ não é sobrejetora, então

$$(A - \xi_j \, Id) \prod_{i \neq j} — \text{ não é sobrejetora}$$

$$\Rightarrow \quad S(A^n) = (S(A))^n.$$

$$\Rightarrow \quad \sigma(A) \leq \liminf \|A^n\|^{1/n}.$$

Agora, suponha que $\underset{=r(A)}{\sup}\{|z| : z \in \sigma(A)\} < \|T\|$.

Note que, para $\varsigma > \|T\|$, $(A - \varsigma \mathrm{Id})^{-1} = R_\varsigma = -\frac{1}{\varsigma}\sum_{n=0}^{\infty} \varsigma^{-n} A^n$.

Porém, pela unicidade funções analíticas (com valores em espaços de Banach), segue que

$$R_\varsigma = -\frac{1}{\varsigma}\sum \varsigma^{-n} A^n \qquad \forall \; \varsigma > r(A),$$

a menos fracamente. Daí, $\varsigma^{-n}A^n \longrightarrow 0$ fracamente

$\Rightarrow \varsigma^{-n}A^n$ é limitada

$\Rightarrow \exists\, C > 0 : \quad C \geq \|\varsigma^{-n}A^n\| = |\varsigma|^{-n}\|A^n\|$

$\Rightarrow 1 \geq |\varsigma|^{-1} \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.

$\Rightarrow \lim \|A^n\|^{1/n} \leq |\varsigma|$. $\square$

<u>Observação</u>. $\lim \|A^n\|^{1/n}$ existe pelo <u>Lema de Fekete</u>:

Se $a_{n+m} \leq a_n + a_m$, então $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in [-\infty, \infty)$.

---

<u>Operadores compactos</u>

Uma das classes importantes de operadores.

<u>Def</u>. Sejam $X, Y$ espaços de Banach e $T : X \to Y$ linear. Então, $T$ é operador compacto se uma das condições equivalentes é satisfeita.

(1) Se $B$ é limitado, então $T(B)$ é relativamente compacto.

② $T(\{x : \|x\| < 1\})$ é ~~compacto~~ relativamente compacto.

③ Se $(x_n)$ é sequência limitada, então $(Tx_n)$ contém uma subsequência convergente.

Observações ① T compacto => T limitado.

② Se $\dim(T(X)) < \infty$ => T compacto

③ Se $\dim X = \infty$, então id não é compacto.

# Motivação para estudar operadores compactos

① Exemplo de um ideal ( Operadores compactos ⊂ Operadores limit).

② Parecido aos operadores em dimensão finita.

③ Teorema espectral acessível

④ Na minha área de pesquisa, operadores normalmente são 'quasi-compacto'.

⑤ Para só chutar na palestra : "Ruelle resonances".

⑥ Seja $k : [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ contínua

$$\Rightarrow \quad T(f) = \int_a^b k(\cdot, s)\, f(s)\, ds$$

é contínuo.

⑦ Fredholm

Prova de ⑥.

$$T(f)(t_1) - T(f)(t_2) = \int_a^b k(t_1, s) - k(t_2, s)\, f(s)\, ds$$

$$\leq \|f\|_\infty \int_a^b | k(t_1, s) - k(t_2, s) |\, ds$$

Como $k$ é uniformemente contínuo, $\exists\ \forall\ \varepsilon > 0$ um $\delta > 0$ tal que $|t_1 - t_2| < \delta$ implica que $|k(t_1,s) - k(t_2,s)| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \left| T(f)(t_1) - T(f)(t_2) \right| < \|f\|_\infty\, \varepsilon \cdot |b-a|$$

<u>Ou seja</u>. $T(B_1(0)) \subset \{ g : \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 :$
$g(t_1) - g(t_2) < |b-a| \cdot \varepsilon\ \ \forall |t_1 - t_2| < \delta \}$

$\Rightarrow$ (Arzelà - Ascoli) $\overline{T(B_1(0))}$ é precompacto. $\square$

Fatos: (i) $K(X,Y) = \{T : X \to Y \text{ compacto}\}$ é fechado ($X, Y$ Banach)

(ii) Se $T$ é compacto, então $A \circ T$, $T \circ A$ são compactos, para $A$ limitado.

(iii) De fato, $K(X,Y)$ é subespaço fechado.

Prova. (ii) é óbvio.

(i) Seja $S \in \overline{K(X,Y)}$. Daí, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T$ compacto com $\|S - T\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \exists x_1, \dots, x_n$ tal que $T(B_1(0)) \subset \bigcup_i B_\varepsilon(Tx_i)$

$\Rightarrow \forall y \in B_1(0)$ $\exists x_i : \|Tx_i - Ty\| < \varepsilon$.

$\Rightarrow \|Sy - Sx_i\| \leq \|Sy - Ty\| + \|Ty - Tx_i\| + \|Tx_i - Sx_i\|$
$\leq 3\varepsilon$.

$\Rightarrow S(B_1(0)) \subset \bigcup B_{3\varepsilon}(S(x_i))$. $\Rightarrow$ S compacto $\square$

(iii) $T$ compacto $\Rightarrow \lambda T$ compacto.
Seja $S, T$ compactos $\Rightarrow$ $S \oplus T : X^2 \to Y^2$ é compacto.
$\Rightarrow x \mapsto (x,x) \xrightarrow{\text{compacto}} (Sx, Tx) \mapsto (S+T)(x)$ é compacto por ii

Lema. Seja $A \subset X$ compacto, $X$ Banach. Então, qualquer sequência $(f_n)$ em $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ contém uma subsequência uniformemente convergente em $A$.

Prova. Define $\mathcal{B} := \{f|_A : f \in X', \|f\| \leq 1\}$. Pelo teorema de Arzelà-Ascoli, basta mostrar que $\mathcal{B}$ é limitado e que $\mathcal{B}$ é equicontínua.

$\square$

Exercício —

**Proposição** Para $X, Y$ Banach e $T: X \to Y$ compacto, $T^*: Y' \longrightarrow X'$ é compacto.

**Prova.** Seja $(f_n)$ sequência em $\{ f \in Y^* \mid \|f\| \leq 1 \}$.

Basta mostrar que $\exists\, n_k$ t.q. $(T^* f_{n_k})_k$ é convergente em $X^*$.

Porém, pelo Lema anterior, existe uma sequência $(f_{n_k})$ que converge uniformemente no compacto $\overline{T(B_1(0))}$.

$\Rightarrow \| f_{n_k}(y) - f_{n_l}(y) \| < \varepsilon$ $\quad \forall \varepsilon > 0$ e $n_k, n_l$ suff. large, $y \in \overline{T(B_1(0))}$

$\Rightarrow \| f_{n_k} \circ Tx - f_{n_l} \circ Tx \| \leq \varepsilon$ $\quad \forall x \in B_1(0)$.

$\Rightarrow \| T^* f_{n_k} - T^* f_{n_l} \| \leq \varepsilon$ $\quad \forall k, l$ large

$\Rightarrow \left( T^*(f_{n_k}) \right)$ é Cauchy. $\Rightarrow$ converge $\quad \square$

**Teorema** (Riesz) Seja $X$ Banach e $K: X \to X$ compacto.

Então, para $T := Id - K$:

(1) $\dim(\ker T) < \infty$

(2) $T(X)$ fechado

(3) $\dim(X/TX) < \infty$

**Prova:**

① $x \in \ker(Id - K) \iff x = K(x)$

$\Rightarrow \ker(Id-K) \cap B_1(0)$ é compacto

$\Rightarrow \dim( \;\;"\;\; ) < \infty$.

Para os demais casos vamos precisar algumas preparações:

Lema. Suponha que $V \subset X$ tem dim finita $\Rightarrow \exists$ subespaço $W$ fechado tal que $V \oplus W = X$

Prova. Escolhe uma base $\{e_i\}$ de $V$. Seja $\{e_i^*\}$ a base dual.

$\Rightarrow$ Estende $\{e_i^*\}$ a $\{f_i\}$, usando Hahn-Banach e

define $Q(x) = \sum_i f_i(x) e_i$

Daí 1) $Q^2(x) = \sum_i f_i(x) Q(e_i) = \sum f_i(x) e_i$ pois $\{e_i^*\}$ é a base dual (i.e. $e_i^* e_j = \delta_{ij}$).

2) $Q|_V = Id.$

$\Rightarrow$ Para $W := \ker(Q)$ temos que

$X = V + W$ pois $x = \underbrace{x - Q(x)}_{\in W} + \underbrace{Q(x)}_{\in V}$.

Além disso, $x \in V \cap W \Rightarrow Qx = 0 \Rightarrow x = 0$ $\square$

Lema: Seja $V \subset X$ fechado tal que $\dim(X/V) < \infty$.

$\Rightarrow \exists W$ fechado com $V \oplus W = X$

Prova. Escolhe $x_1 - x_n$ tal que $\{[x_i]\}$ é base de $X/V$ e define $W := \mathrm{Span}\{x_i\} \dots$ $\square$

Lema: Suponha que $T(X)$ é fechado e $\dim(X/TX) < \infty$

$\Rightarrow (X/TX)^* = \ker(T^*)$

Prova. Note que

$$\ker T^* = \{ f \in X^* : f \circ T = 0 \}$$
$$= \{ f \in X^* : f(x) = f(y) \ \forall \ x - y \in TX \}$$

$\Rightarrow \exists \ \Phi : \ker T^* \longrightarrow (X/TX)^*$ (bem def. pois $TX$ fechado)

$f \longmapsto \bar{f}$

Para $\ker \Phi = \{0\} \Rightarrow \Phi$ injetor. Pelo Lema anterior: $X = TX \oplus W$

$\Rightarrow \Phi$ é sobrejetor $\square$

Prova do teorema de Riesz, Pt ② e ③

(iii) Pelo Lema e (ii): $(X/TX)^* \cong \ker(T^*) = \ker(Id - K^*)$

Como $K^*$ é compacto, $\infty > \dim(\ker(T^*)) = \dim (X/TX)^*$

$= \dim (X/TX)$.

(ii) Para $V = \ker(T)$, existe pelo Lema um $W$

tal que $X = V \oplus W$

$\Rightarrow T|_W : W \to TX$ é bijetor e contínuo.

(mas $TX$ não é necessariamente fechado)

Vamos mostrar que $T|_W^{-1}$ é contínua:

Define $\varepsilon := \inf_{w \in W} \{ \|Tw\| : \|w\| = 1\}$ e note que $\|T|_W^{-1}\| = \frac{1}{\varepsilon}$.

Se $\varepsilon = 0$, então existe $(w_n)$ com $\|w_n\| = 1$ e $\|Tw_n\| = \frac{1}{n}$.

Pela compacidade de $K$ podemos supor que $(Kw_n)$ é convergente:

seja $w_\infty := \lim_{n\to\infty} Kw_n \in W$ pois $W$ é fechado, e $\|w_\infty\| = 1$

$\Rightarrow 0 = \lim_{n\to\infty} T(w_n) = \lim_{n\to\infty} w_n - Kw_n$

$= \lim_{n\to\infty} w_n - w_\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} w_n = w_\infty$

Daí, $w_\infty \in V \cap W = \{0\}$, mas $\|w_\infty\| = 1$ $\square$

# Operadores de Fredholm

**Definição.** Seja $T : X \to Y$ limitada, $X, Y$ Banach.

Então, $T$ é FREDHOLM se

① $\dim(\ker(T)) < \infty$

② $T(X)$ fechado

③ $\dim(X/TX) < \infty$

Neste caso: $\operatorname{ind}(T) := \dim \ker(T) - \dim(X/TX)$

· $F(X,Y) = \{ T : X \to Y \mid T \text{ Fredholm} \}$

· $L(X,Y) = \{ T : X \to Y \mid \text{lin, limitado} \}$

**Teorema:** 1) $F(X,Y)$ é aberto em $L(X,Y)$.

2) $\operatorname{ind} : F(X,Y) \to \mathbb{Z}$ é contínua

**Prova:** (1) Pelos lemas anteriores, existem espaços complementares $V, W$ tal que

$$X = \underbrace{\ker(T)}_{\dim < \infty} \oplus V \quad , \quad Y = T(X) \oplus \underbrace{W}_{\dim < \infty} .$$

Para $S \in L(X,Y)$, define

$$\tilde{S} : V \times W \to Y \ , \ (v,w) \longmapsto Sv + w ,$$

Aplicado em $T$: $\tilde{T}$ é bijetor e limitado.

Pelo Lema da Teoria espectral: $\exists$ uma vizinhança de $\tilde{T}$ em $L(V \times W, Y)$ de operadores bijetores.

Como $S \to \tilde{S}$ é contínua: $\exists$ vizinhança $\mathcal{U}$ de $T$ tal que para qualquer $S \in \mathcal{U}$, $\tilde{S}$ é bijetor.

Para $S \in \mathcal{U}$ temos:

① $SV = \tilde{S}V$, e $\tilde{S}V$ é fechado pois $V$ é fechado.

② $\ker(S) \cap V = \{0\}$ pois $\tilde{S}$ é bijetor

$\Rightarrow \ker(S) \subset \ker(T)$, $\dim \ker(S) < \infty$

(3) O que falta: $\tilde{S}$ é bijetor $\Rightarrow$

Se $Sv + w = u + \tilde{w}$, $u \in TX$, $\tilde{w} \in W$,

então $Sv = u$, $w = \tilde{w}$.

$\Rightarrow$ $\dim Y/SV = \dim W$.

(4) Como $SX \supset SV$, e $\dim Y/SV < \infty$,

então $S(X)$ é fechado (Lema / exercício)

e $\dim Y/S(X) \leq \dim Y/SV < \infty$.

Daí, $S \in F(X,Y)$. Além disso:

$\dim(\ker S) \leq \dim \ker(T)$, $\dim(X/SX) \leq \dim(X/TX)$.

Ou seja, as aplicações são semicontínuas.

O resto é simples (de fato, é álgebra ~~linear~~):

$(\dim \ker T - \dim \ker S) = \dim(X/TX) - \dim(XS/X)$ □

Uns consequencias do teorema

(0) De facto, Não precisamos que TX é fechado para $T: X \to Y$, $\dim Y/TX < \infty \Rightarrow TX$ fechado

(1) Suponha que $k$ é compacto
$\Rightarrow \mathrm{ind}(Id - k) = 0$

Prova. $\mathrm{ind}(Id) = 0 \Rightarrow \mathrm{ind}(Id - tk) = 0 \ \forall t$.

(2) Alternativa de Fredholm $T: X \to Y$

Suponha que $T$ é Fredholm e $\mathrm{ind}(T) = 0$. Então, para as soluções de $Tx = y$ tem a seguinte dicotomia:

Ou $\exists$ solução $x$ para qualquer $y$. Neste caso $T$ é bijetor

Ou $\exists y \in Y$ tal que $Tx \neq y \ \forall x$. Neste caso, se $\{x : Tx = y\} \neq \emptyset$, então é subespaço afim de dimensão finita.

[ Versão clássica: $T(f) = \lambda f - \int k(x, \cdot) f(x)\, dx$ ]

(3) Seja $k$ compacto e $\lambda \in S(k) \setminus \{0\}$. Então, a gente está no segundo caso da alternativa:
$$\ker(Id - \lambda T) \neq \{0\}.$$

Vamos coletar mais umas propriedades dos operadores de Fredholm:

TEOREMA
Seja $T: X \to Y$ Fredholm. Então $T^*: Y^* \to X^*$ é Fredholm, $\mathrm{ind}(T) = -\mathrm{ind}(T^*)$ e
$$\ker(T^*) \cong (Y/TX)^*, \quad X^*/T^*(Y^*) = (\ker T)^*$$

Prova. (i) A prova de $\ker(T^*) \cong (Y/TX)^*$ é a mesma do que no teorema de Riesz.

(ii) Nota que $X^*/TY^* = X^*/\sim$ onde

$f \sim g \iff f-g \in T Y^* \iff \exists \varphi \in Y^* : f-g = \varphi \circ T$

Daí: $f \sim g \iff f-g|_{\ker T} = 0$

$\Rightarrow \quad X^*/_{TY^*} \longrightarrow (\ker T)^*$ é bem definido
$[f] \longmapsto f|_{\ker T}$

Além disso, como $TX$ é fechado, $X/_{\ker T} \xrightarrow{[T]} TX$ é isomorfismo contínuo.

$\Rightarrow [T]^*$ isom. contínuo, e cada $f \in (X/_{\ker T})^*$ pode ser escrito como $f = \varphi \circ [T]$, para $\varphi \in (TX)^*$.

Assim, obtém-se que o mapa é 1-1 $\square$

Teorema: Sejam $F : X \to Y$, $T : Y \to Z$ operadores de Fredholm. Então, $T \circ F$ é Fredholm e $\operatorname{ind} T \circ F = \operatorname{ind}(T) + \operatorname{ind} F$.

Prova. É simples verificar que os espaços relevantes tem dimensão finita. E a fórmula do índice é cálculo. $\square$

# A teoria espectral de operadores compactos / Forma de Jordan

## Resultado preparatório

Seja $X$ Banach e $K: X \to X$ compacto, e $T = Id - K$.
Então,
$$\ker T \subset \ker T^2 \subset \dots$$
$$T(X) \supset T^2 X \supset \dots$$
e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\ker T^n = \ker T^m$, $T^n X = T^m X$ $\forall\, m \geq n$. Além disso, $X = \ker T^n \oplus T^n X$,

$\dim \ker T^n < \infty$, $\dim X/T^n X < \infty$ e $T: T^n X \to T^n X$ é bijetor.

Prova: Ao primeiro $\ker T^m$, $X/T^m X$ são de dimensão finita pois $T^m$ é Fredholm.

Agora, suponha que a sequência $(\ker T^n)$ não é constante para $m$ suf. grande. Utilizamos uma versão do Lema de Riesz:

Escolhe $x_m \in \ker(T^m) \setminus \ker(T^{m-1})$. Como $\ker(T^{m-1})$ é fechado: $\exists\, b_m \in \ker(T^{m-1})$ : $d(b_m, x_m) \leq 2\, d(x_m, \ker T^{m-1})$

$$\Rightarrow a_m := \frac{x_m - b_m}{\|x_m - b_m\|} \text{ satisfaz } d(a_m, x) \geq \tfrac{1}{2} \quad \forall x \in \ker(T^{m-1})$$

Além disso; para $v \in \ker(T^{m-1})$, usando $K = Id - T$
$$\|K(v) - K(a)\| = \|v - Tv - a_m + Ta_m\|$$
$$= \|\underbrace{v - Tv + Ta}_{\in \ker T^{m-1}} - a_m\| \geq \frac{1}{2}$$

Mas $K$ é compacto $\Rightarrow$ uma tal sequência não existe.

$\Rightarrow \exists\, n$ com $\ker(T^n) = \ker(T^m)$ $\forall\, m \geq n$

Além disso, por Fredholm, a sequência $T^n X = T^{n_0} X$ $\forall n \geq n_0$.

Basta mostrar que $T^n X \oplus \ker T^n = X$:

① Se $v \in T^n X \cap \ker T^n$, então $T^n v = 0$ e $\exists w : T^n w = v$.

$\Rightarrow w \in \ker T^{2n} = \ker T^n \Rightarrow v = T^n w = 0$.

② Seja $v \in X$. Como $T^{2n} X = T^n X$ $\exists w \in T^n X$ tal que $T^n v = T^n w$

$$\Rightarrow v = w + \underbrace{v - w}_{\in \ker T^n}$$

□

Teorema. Seja $X$ Banach complexo e $K : X \to X$ compacto.

① $S(K)$ é finito ou enumerável com ao máximo um ponto de acumulação em $0$.

② Qualquer elemento $\lambda \in S(K) \setminus \{0\}$ é autovalor. Além disso, existe uma decomposição $F_\lambda \oplus N_\lambda$ de $X$ tal que

① $\dim N_\lambda < \infty$, $K(N_\lambda) \subset N_\lambda$ e existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$:

$$(K - \lambda \mathrm{Id})|_{N_\lambda}^{n_\lambda} = 0.$$

② $K(F_\lambda) \subset F_\lambda$, $K - \lambda \mathrm{Id} : F_\lambda \to F_\lambda$ bijetor.

③ Se $\lambda, \mu \in S(K) \setminus \{0\}$ e $\lambda \neq \mu$, então

$$N_\lambda \subset F_\mu$$

Prova. A parte ② é consequência da última proposição.

Para a parte ①: Seja $\lambda \in S(K)$. Então, existe vizinhança $\mathcal{U}$ de $\lambda$ tal que $(K - \mu \mathrm{Id})_{F_\lambda} = (K - \lambda \mathrm{Id})|_{F_\lambda} + (\lambda - \mu) \mathrm{Id}|_{F_\lambda}$ é invertível $\forall \mu \in \mathcal{U}$.

Além disso, como $(K - \lambda \mathrm{Id})|_{N_\lambda}$ é nilpotente, pode-se escolher uma base tal que a matriz associada é da forma $\begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

Daí, $(K-\mu Id)|_{N_\lambda}$ é da forma

$$\begin{pmatrix} \lambda-\mu & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda-\mu \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ $K-\mu Id$ é invertível.

Para mostrar (7)

Para $\mu \neq \lambda$, $\lambda, \mu \in S(A)$, $K-\mu Id : N_\lambda \to N_\lambda$ é bijetor. Para $x = v+w$ com $x \in N_\lambda$, $v \in N_\mu$, $w \in F_\mu$:

$$(K-\mu(Id))^n(x) = (K-\mu(Id))^n(w) \quad \text{para } n \text{ suff grande.}$$

Como $N_\lambda$ tem dimensão finita: $v = 0$ e $x \in F_\mu$ □

E existe uma forma normal de Jordan para operadores compactos?

Suponha que $S(K) = \{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$. Então, pode-se fazer uma decomposição iterada:

$$X = N_{\lambda_1} \oplus F_{\lambda_1}, \quad F_{\lambda_1} = N_{\lambda_2} + (F_{\lambda_2} \cap F_{\lambda_1}) \ \ldots$$

até chegar em $N_{\lambda_1} \oplus \ldots N_{\lambda_k} \oplus \bigcap_{i=1}^{k} F_{\lambda_i}$.

O que se sabe sobre $\bigcap_{i=1}^{k} F_{\lambda_i} =: \overline{F}_k$ ?

(1) $K F_k \subset F_k$

(2) $K : \bigoplus_{i=1}^{k} N_{\lambda_i} \circlearrowleft$ tem JNF

(3) O raio espectral de $K|_{F_k} = \max\{|\lambda_i| : i > k\}$

$$\Longrightarrow \lim \|K^n|_{F_k}\|^{1/n} = \max\{|\lambda_i| : i > k\}$$

Um outro problema: Existem operadores compactos ~~não~~ nulos com espectro $\{0\}$.