Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise Funcional (doutorado), 2024-1
Manuel Stadlbauer

7 Espaços de Hilbert e operadores autoadjuntos

Questão 7.1. Seja $\varphi \in L^2([0,2\pi])$. Mostre, usando a teoria geral, que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{-int}\varphi(t)dt = 0.$$

Questão 7.2. Seja X um espaço de Hilbert e (A_n) uma sequencia crescente de operadores autoadjuntos tal que $A_i \leq B$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e um B autoadjunto.

a) Mostre que $\lim_{n\to\infty}\langle A_n x, y\rangle$ existe para cada $x, y \in X$.
Dica. Ideia parecida ao lei do paralelograma.
b) Mostre que $(A_n x)$ é sequência de Cauchy, para cada $x \in X$.
Dica. Considere $\langle (A_n - A_m)x, (A_n - A_m)x\rangle$.
c) Mostre que existe $A \in L(X,X)$ tal que $A_n \to A$ fracamente.

8 Operadores lineares

Questão 8.1. Seja $X = \ell^p(\mathbb{N})$, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$ e $T : X \to X, (x_n) \mapsto (f(n)x_n)$. Dê condições para T ser (a) bem definido, (b) limitado e (c) compacto.

Questão 8.2. Seja X um espaço de Banach e $T \in L(X,X)$. Mostre que $\lim_{|\xi|\to\infty} \xi R_\xi = -\mathrm{id}$ e $\lim_{|\xi|\to\infty} R_\xi = 0$.

Questão 8.3. Seja μ uma medida σ-finita e $\varphi \in L^2(\mu)$ uma função limitada e não constante. Determine o espectro do operador de multiplicação $T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ dado de $T(f)(x) = f(x)\varphi(x)$.

Questão 8.4. Seja X um espaço de Hilbert complexo e $T \in L(X,X)$ um operador de posto finito. Mostre que o espectro $S(T)$ é um conjunto finito.

Questão 8.5. Sejam X um espaço de Banach complexo e $S, T \in L(X,X)$ operadores com $ST = TS$. Mostre que os raios espectrais satisfazem $r(ST) \leq r(S)r(T)$.