As topologias fracas

Definição (topologia inicial)

Seja X um conjunto e $\{f_i : X \to Y_i \mid i \in I\}$ uma família de mapas de X para uma família de espaços top. $\{(Y_i, J_i) : i \in I\}$.
Então, a topologia inicial J é a topologia mais grossa tal que

$$f_i : X \to Y_i$$

é contínua.

Para obter um entendimento abstrato da topologia inicial: Obviamente, $f_i^{-1}(U_i) \in J$ para $i \in I$ e U_i aberto. Daí, $\bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) \in J$ para qualquer $J \subset I$ finito e U_i abertos.

$\Rightarrow$ A união qualquer de conjuntos deste tipo pertence a J. Como a família deste tipo de conjuntos é uma topologia, obtemos o seguinte:

Seja $\mathcal{E} := \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_{i,J}) \;\middle|\; J \subset I \text{ finito}, U_{i,J} \in J_i \right\}$.

Proposição Seja J a topologia inicial associada a $\{f_i : X \to Y_i \mid i \in I\}$. Então,

① $\tau = \left\{ \bigcup_{s \in \mathcal{S}} A_s \;\middle|\; \mathcal{S} \text{ família qualquer}, A_s \in \mathcal{E} \right\}$

② $A \in \mathcal{J} \iff \forall x \; \exists \; \mathcal{U} \in \mathcal{E}$ com $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset A$.

<u>Prova.</u> ① Já foi provado

② $\Rightarrow$ é uma consequência de ①. A volta segue do argumento seguinte: $\exists \; x \mapsto \mathcal{U}_x \in \mathcal{E}$ tal que $x \in \mathcal{U}_x$, $\mathcal{U}_x \subset A$
$\Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} \mathcal{U}_x$ $\square$

<u>Definição:</u> A <u>topologia fraca</u> num espaço normado X é a topologia inicial associada a X^*.
Ou seja, a topologia mais grossa tal que cada $\varphi \in X^*$ é contínua.

<u>Fatos:</u>

① A topologia da norma é mais fina do que a top-fraca pois cada elemento em X^* é $\|\cdot\|$-contínua.

② A topologia fraca é Hausdorff

<u>Prova.</u> Seja $x \neq y \xrightarrow{HB} \exists \; \varphi \in X^*$ com $\varphi(x) \neq \varphi(y)$
$\Rightarrow$ Para $\varepsilon < \frac{1}{2} |\varphi(x) - \varphi(y)|$,
$B_\varepsilon(\varphi(x)) \cap B_\varepsilon(\varphi(y)) = \emptyset$
$\Rightarrow \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(x)))$, $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(y)))$ são vizinhanças disjuntas de x e y, resp. $\square$

③ Suponha que $x_n \to x$ na topologia fraca. Então: $\{\forall$ vizinhança $\mathcal{U}$ de $0 \; \exists \; N: \; x_n - x \in \mathcal{U} \; \forall \; n \geq N\}$.

④ $x_n \xrightarrow{\text{fraca}} x \iff \forall \; f \in X^*: \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$

Prova. (4) Se $x_n \xrightarrow{fraca} x$, então $\forall f \in X^*$ e $\varepsilon > 0$ $\exists N$:

$$x_n - x \in f^{-1}(B_\varepsilon(0)) \quad \forall n \geq N. \implies |f(x_n - x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$\implies \lim f(x_n) = f(x) \quad \forall f \in X^*$ com ε, f arbitrário.

(b) Suponha que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \quad \forall f \in X^*$

$\implies$ Para $f_1, \dots, f_m$ e $\varepsilon > 0$, existe N:

$$|f_j(x_n) - f_j(x)| < \varepsilon \quad \forall 1 \leq j \leq m, \quad n > N$$

$$\implies \quad x_n - x \in \bigcap_{j=1}^{m} f_j^{-1}(B_\varepsilon(0)) \quad \forall n > N$$

$\implies x_n \xrightarrow{fraca} x$ $\square$

(5) Se $x_n \xrightarrow{fraca} x$, então $\sup\{\|x_n\|\} < \infty$.

Prova. $\sup|f(x_n)| < \infty \quad \forall f \in X^*$ pois $f(x_n) \to f(x)$.

$\overset{\text{Limitação unif.}}{\implies}$ $\{x_n\}$ limitado. $\square$

(6) Se $T: X \to Y$ é limitado, então T é fracamente contínua

Prova. Exercício. $\square$

Exemplos:

- $X = C_c(\mathbb{R}) := \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ contínua e $\overline{f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})} = supp(f)$ é compacto$\}$
- $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}$

Daí, $X^* = \{$medidas finitas$\}$. Além disso, [Teorema de Riesz-Markov]

$$\lim_{n\to\infty} \int \mathbb{1}_{[n,n+1]} \, d\mu = 0 \quad \forall \mu \in X^*$$

$\implies f_n \longrightarrow 0$ fracamente $\square$

Exercício. Mostre que $C_0(X) = \overline{C_c(X)}$

A topologia fraca* $((X, \|\cdot\|)$ normado$)$

Definição. A topologia fraca* em X^* é a topologia inicial associada à família de mapas
$$\{ p_x : X^* \to K \ , \ f \mapsto f(x) \mid x \in X \}.$$

Ou, em outras palavras, de $\iota(X)$, onde $\iota : X \to X^{**}$ é a isometria canónica.

Factos: ① A topologia fraca* é Hausdorff.

Prova: Se $f \neq g$ então existe x : $f(x) \neq g(x)$. —

② $f_n \xrightarrow{\text{fraca}^*} f \iff \forall x : f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Exemplo: $X = C_c(X)$; $\mu_n \xrightarrow{\text{fraca}^*} \mu$
$$\iff \int f \, d\mu_n \longrightarrow \int f \, d\mu \quad \forall f \in X.$$

Observação: Como $\overline{C_c(X)} = C_0(X)$, $\left(C_0(X)\right)^* = \left(C_c(X)\right)^*$.

Teorema (Banach-Alaoglu): Seja X espaço normado. Então

$$B^* = \{ f \in X^* : \|f\| \le 1 \}$$

é compacto na topologia fraca*.

Prova. A prova depende do teorema de Tychonov: lembre que a a topologia do produto dos espaços topológicos $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ é a topologia mais grossa tal que as aplicações

$$\pi_i : \prod_{j \in I} X_j \longrightarrow X_i, \quad (x_j) \longmapsto x_i$$

são contínuas (ou seja, a topologia initial de $\{\pi_i : i \in I\}$).

O teorema de Tychonov nos diz o seguinte (1935)

Se cada $(X_i, \mathcal{T}_i)$ é compacto, então $\prod X_i$ é compacto em relação com a topologia do produto.

Observações.

1. I é um conjunto qualquer, não necessariamente enumerável.
2. Seja $X_i = [-1,1]$ para $i \in I$. Então, $[-1,1]^I$ é a bola unitária de $\prod X_i$ em relação com a norma $\|\cdot\|_\infty$, que não é compacta em relação com a norma $\|\cdot\|_\infty$ pois $|I| = \infty$. Porém, por Tychonov, é compacto em relação com a top. do produto.

Baseado no teorema, fazemos o seguinte:

Para $x \in X$, define $Y_x := \mathbb{K}$ e $\eta : X^* \longrightarrow \prod_{x \in X} Y_x$ por

$$f \longmapsto \prod_x f(x).$$

Como η é injetora, podemos considerar X^* como subconjunto de $\prod Y_x$.

Além disso, como as topologias são top. iniciais em relação com o mesmo conjunto de aplicações, η é contínua. De fato, a topologia fraca* em X^* e a topologia induzida em $\eta(X^*) \subset \prod Y_x$ coincidem.

Para aplicar o Tychonov:

① Seja $B_x := \{ t \in \mathbb{K} : |t| \leq \|x\| \}$.

Para $f \in B^*$, obtém-se que

$$|f(x)| \leq \underbrace{\|f\|}_{\leq 1} \cdot \|x\| \leq \|x\|.$$

$$\Rightarrow \eta(B^*) \subset \prod_{x \in X} B_x.$$

② Agora, suponha que $f \in \overline{\eta(B^*)}$. Para mostrar que $\eta(B^*)$ é fechado, basta mostrar que f necessariamente é linear e $\|f\| \leq 1$:

[aqui, usamos a identificação de $\prod_{x \in X} Y_x$ com $F(X, \mathbb{K})$]

Para provar estas propriedades, usamos a propriedade da top. induzida: Para $\varepsilon > 0$ e $x, y \in X$,

ⓐ $U := \{ g \in \prod B_x : |g(x+y) - f(x+y)| < \varepsilon,$
$|g(x) - f(x)| < \varepsilon, |g(y) - f(y)| < \varepsilon \}$

é aberto (sendo interseção de 3 abertos) em $\prod B_x$.

Como $f \in \overline{\eta(B^*)}$, $\exists\, g \in U \cap \eta(B^*)$.

Daí, $|f(x+y) - f(x) - f(y)| \leq \underbrace{|g(x+y) - g(x) - g(y)|}_{= 0} + 3\varepsilon$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} f(x) + f(y) = f(x+y).$$

ⓑ Do mesmo jeito para $\lambda \in \mathbb{K}$:

$V = \{ g : |\lambda f(x) - \lambda g(x)| < \varepsilon, |f(\lambda x) - g(\lambda x)| < \varepsilon \}$

$\Rightarrow \exists\, g$ linear ... $\Rightarrow f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

ⓒ ... $\|f\| \leq 1$

$\xrightarrow{a,b,c} \eta(B^*)$ é fechado em $\prod B_x$, e, em particular COMPACTO. □

Def.: Um espaço topológico X é <u>separável</u> se existe um conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que, para qualquer $\mathcal{U}$ aberto, $\{x_n\} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$.

<u>Exemplos e propriedades básicas</u>

① $\mathbb{R}^n$ é separável pois $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ é denso.

② Uma <u>base de Schauder</u> de um espaço vetorial topológico X é um conjunto $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ tal que, para qualquer $x \in X$, $\exists!\ (\alpha_i : i \in \mathbb{N})$ em $\mathbb{K}$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = x.$$

Obviamente, Schauder $\Rightarrow$ Separável.

③ No caso de $\ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p < \infty$, $e_i := (0, \ldots, \overset{i\text{-ésima}}{1}, 0, \ldots)$ define uma base de Schauder (trivial / exercício).

④ <u>$\ell^\infty(\mathbb{N})$ não é separável.</u>

Suponha que (a_n) é sequência em ℓ^∞. Define

$$b_k := \begin{cases} a_k^{(k)} + 1 & , \ |a_k^{(k)}| \leq 1 \\ 0 & , \ |a_k^{(k)}| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|(b_k) - a_n\| \geq 1 \quad \forall n. \qquad \square$$

⑤ <u>Relevância:</u> Em espaços normados e separáveis, existem <u>bases de Schauder</u>.

Def.: Um espaço topológico satisfaz o 1º axioma da enumerabilidade se, para qualquer $x \in X$, existe uma base enumerável das vizinhanças de x.

A vantagem deste axioma é que pontos de acumulação podem ser analisados por sequências:

<u>Proposição</u> - Seja X um esp. top. com o 1º axioma.

① Se (x_n) é sequência e x é ponto de acumulação (i.e. qualquer vizinhança $-$,) , então existe $x_{n_k} \longrightarrow x$.
e $x \in \overline{\{x_n\}}$

② Se (x_n) é sequência num compacto, então existe uma subseq. convergente.

<u>Prova</u> ① Seja (U_i) base de top. em x. Daí, para qualquer i existe n_i com $x_{n_i} \in U$. ~~Ou seja~~

Então, ou $\exists i$ com $x_{n_i} = x$ ou <u>pode-se</u> escolher $n_i \nearrow \infty$. –

② ~~Escolha~~ Seja $A_n := \{x_k : k \geq n\}$. Sendo um subconjunto de um compacto, $\overline{A_n}$ é compacto

$\overset{\text{Cantor}}{\Longrightarrow}$ $\bigcap\limits_{n>0} \overline{A_n} \neq \emptyset$ pois $\overline{A_m} \supset \overline{A_{m+1}}$.

Mas qualquer $x \in \bigcap \overline{A_n}$ é ponto de acumulação. □

<u>Teorema</u>: Seja X separável na topologia da norma. Então, $\mathbb{B}^*$ satisfaz o 1º axioma da enumerabilidade em relação com a norma fraca*.

<u>Prova</u>. Seja $f \in X^*$. Então, para qualquer vizinhança U de f, existem $\varepsilon > 0$ e $x_1, \ldots, x_n \in X$ tal que

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} \{ g : |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \}.$$

Escolhe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{3}{m} < \varepsilon$. Além disso, escolha $y_1, \ldots, y_n$ do conjunto ~~denso~~ tal que

$$\|y_i - x_i\| < \frac{1}{m}.$$

$\Longrightarrow$ Para $g \in \bigcap \{ g : |g(y_i) - f(y_i)| < \varepsilon,$

$$|f(x_i)-g(x_i)| \leq |f(x_i)-f(y_i)+f(y_i)-g(y_i)+g(y_i)-g(x_i)|$$

$$\leq |f(y_i)-g(y_i)| + |(f-g)(x_i-y_i)|$$

$$\leq \frac{1}{m} + \|f-g\| \cdot \frac{1}{m} \leq \frac{3}{m} < \varepsilon \qquad \square$$

<u>Um exemplo.</u> X loc. compacto, Hausdorff. Por Riesz-Markov: Para qualquer $\varphi \in (C_0(X))^*$ com $\varphi(f) \geq 0$ $\forall f \geq 0$, existe uma medida de Radon tal que $\varphi(f) = \int f \, d\mu$.

Por Banach-Alaoglu:

$$B^* = \{ \varphi : |\varphi(f)| \leq 1 \quad \forall f : \|f\| \leq 1 \}$$

é compacto na top. fraca*. Pela definição, o subconjunto das formas lineares positivas é fechado. Daí, o conjunto é compacto.

Além disso, se X é separável, $C_0(X)$ é separável. Daí, para qualquer sequência (φ_n) em $B_+^* = \{ \varphi \in (C_0(X))^* \mid \varphi \text{ pos} \}$ existe uma subsequência

(φ_{n_k}) tal que $\varphi_{n_k}(f) \longrightarrow \varphi(f)$ $\forall f \in C_0(X)$ e um $\varphi \in B^*_+$. Além disso, $\|\varphi\| \leq 1$ implica que $\int \mathbb{1}\, d\mu_\varphi \leq 1$ pelo teorema da convergência mon. (μ_φ a medida associada à φ pos.). Ou seja $\mu_\varphi(X) \leq 1$.

Porém: ① Seja $X = \mathbb{R}$, $d\mu_n = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]} dx$.

$\Rightarrow$ $\int f\, d\mu_n \longrightarrow 0$ $\forall f \in C_0(\mathbb{R})$.

$\Rightarrow$ $\lim \mu_n = 0$.

② De fato, pode-se provar que

$$\overline{\{\varphi \in B^*_+ \mid \mu_\varphi(X) = 1\}} = B^*_+$$

~~Problema~~ Problema: $\mathbb{1} \notin C_0(X)$

Se X é compacto: $\{\varphi \in B^* \mid \mu_\varphi(X) = 1\}$ é fechado pois $\mu_\varphi(X) = 1 \iff \varphi(\mathbb{1}) = 1$ (ou seja, $\mathbb{1} \in C(X)$).

Neste caso, qualquer sequência contém subseq. convergente.

De fato, vale mais:

Teorema: Seja X normado. Então são equivalentes:

(i) X separável

(ii) $\overline{B}_r^* := \{ g \in X^* : \|g\| \leq r \}$ satisfaz o 1° axioma

(iii) " é metrizável

Prova. Obviamente metrizável $\Rightarrow$ 1° axioma. Além disso, já provamos que separável $\Rightarrow$ 1° axioma.

(a) Agora, suponha que X satisfaz o 1° axioma. Então existem abertos A_n, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \{0\}$.

Pela definição da top. fraca*: $\exists (x_n) \subseteq X$, $(\varepsilon_n) \in (0, \infty)$ tal que $\{ |g(x_n)| < \varepsilon_n \} \subset A_n \quad \forall n$.

Erro: $\exists\, x_1^{(n)} - x_{k_n}^{(n)} \in X$ e $\varepsilon_n > 0$: $|g(x_i^{(n)})| < \varepsilon_n \quad \forall i \leq k_n,\ n$

Seja $E := \operatorname{span}\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$. Além disso, suponha que $g \in X^*$ satisfaz $g(x_n) = 0 \quad \forall x_n$

$\Rightarrow g \in A_n \quad \forall n \Rightarrow g = 0$.

Ou seja, $g|_E = 0$ implica $g = 0$

$\overset{\text{ex.}}{\Longrightarrow}$ X separável (suponha que $g \neq 0$ no aberto ...)

(b) Agora, suponha que X é separável. ~~Para ...~~ Escolha uma sequência (x_n) denso em X. É fácil ver que a topologia inicial de $\{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$ e $\{ x : x \in X \}$ são iguais. Além disso, $\{x_n\}$ separa pontos em X^*.

Daí, defina (s.p.d.g $x_n \neq 0$)

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2^n \|x_n\|}.$$

É fácil ver que d é uma métrica (pois $\{x_n\}$ separa pontos).

Além disso, como $\|f - g\| \leq 2$, $d(f,g) \leq 2 \; \forall f,g$.

E, em particular, para

$$B_{2^{-k}}(f) = \{ g : d(f,g) < 2^{-k} \},$$

temos que

$$(*) = \{ g \mid |f(x_n) - g(x_n)| < \|x_n\| \cdot 2^{-k-1} \; \forall n = 1, \dots k+2 \} \subset B_{2^{-k}}$$

pois $d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f(x_n) - g(x_n)|}{2^n \|x_n\|}$

$$< 2^{-k-1} \cdot \sum_{n=1}^{k+2} 2^{-n} + \sum_{n=k+3}^{\infty} \frac{2}{2^n} < 2^{-k-1} + 2^{-k-1}$$

para $g \in (*)$. (Ou seja, para n grande, a condição é irrelevante).

$\Rightarrow$ A topologia inicial é <u>mais fina</u> do que a top. de d.

(i.e. U d-aberto $\Rightarrow$ U fraca*-aberto.)

Agora, suponha que F é fraca*-fechado em B_1^*. Por Alaoglu, F é fraca*-compacto. Pelo acima, para cada cobertura por d-abertos é uma cobertura por fraca*-abertos. Escolhendo uma subcobertura finita mostra que F é d-compacto $\Rightarrow$ F é d-fechado

$\Rightarrow$ as topologias coincidem. $\square$

<u>Teorema (Goldstine)</u>. Se X Banach, $B := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ e $B^{**} := \{F \in X^{**} : \|F\| \leq 1\}$. Então, $i(B)$ é fraca*-denso em B^{**}.

<u>Observações:</u>

① O teorema permite obter um critério para a reflexividade de X em termos de compacidade.

② Ferramenta para ligar B^{**} com B:

Suponha que $G \in B^{**}$ e $f_1, \ldots, f_n \in X^*$. Se B é fracamente compacto, então existe $x \in B$ com

$$G(f_k) = f_k(x) \quad \forall k.$$

<u>Prova.</u> Define $h : x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} |G(f_k) - f_k(x)|^2$. Por Goldstine, $\inf h|_B = 0$. Como B é fracamente compacto, $\exists\, x$ com $h(x) = 0$ (pois h é contínua na top. fraca) $\square$

③ <u>O que tem-se que provar no teorema?</u>

(a) X^* é normado por $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$, X^{**} é normado.

(b) A fraca* em X^{**} é gerada por, para $G \in X^{**}$, $\varepsilon > 0$, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$:

$$\{F : |F(f_k) - G(f_k)| < \varepsilon \quad \forall k\}.$$

Daí, para provar o teorema, precisa-se mostrar que

$\forall\, G \in B^{**}$, $\varepsilon > 0$, $f_1, \ldots, f_n \in X^*$ $\exists\, x \in B : |G(f_k) - f_k(x)| < \varepsilon$.

Ou seja, na notação anterior: $\inf\{ h(x) : x \in B \} = 0$.

Prova: Seja $I := \inf\{ h(x) : x \in B \}$. Daí, existe $(x_n) \subset B$ com $\lim h(x_n) = I$. Em escolher uma subsequência, podemos assumir uma sequência $(x_n) \subset B$ com $\lim_n h(x_n) = I$, $\lim_n f_k(x_n) =: \xi_k$.

Defina $\delta_k := G(f_k) - \xi_k$. Daí, $I = \sum |\delta_k|^2$. Pela convexidade de B: $\forall x \in B$, $t \in [0,1]$:

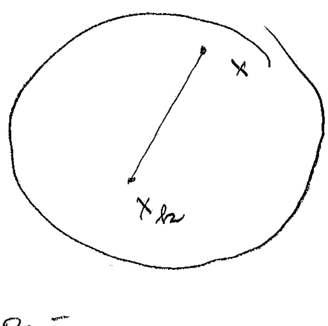
$$I \le h\big((1-t)x_n + tx \big) = \sum |G(f_k) - (1-t) f_k(x_n) - t f_k(x)|^2$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \sum_{k=1}^N | \delta_k + t(\xi_k - f_k(x)) |^2$$

$$= \sum_{k=1}^N |\delta_k|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\delta_k \cdot t\,\overline{(\xi_k - f_k(x))} \right) + t^2 |\xi_k - f_k(x)|^2$$

$$= I + \sum_k 2t\,\mathrm{Re}\left(\delta_k \overline{(\xi_k - f_k(x))} \right) + \sum_k t^2 |\xi_k - f_k(x)|^2$$

$$\xRightarrow{t \to 0} \sum_k \mathrm{Re}\left(\delta_k \overline{(\xi_k - f_k(x))} \right) \ge 0$$



Defina $f := \sum_k \bar{\delta}_k f_k$.

$$\Rightarrow 0 \le \mathrm{Re} \sum_{k=1}^N \delta_k \overline{(\xi_k - f_k(x))}$$

$\mathrm{Re}\, x = \mathrm{Re}\, \bar{x}$

$$= \mathrm{Re} \sum_k \bar{\delta}_k (\xi_k - f_k(x)) = \mathrm{Re}\left(\sum_k \bar{\delta}_k \xi_k - f(x) \right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}(f(x)) \le \sum_{k=1}^N \bar{\delta}_k \xi_k = \alpha$$

Como x é arbitrário: $\|f\| \le \alpha$.

Porém, $\lim f(x_n) = \sum \bar{\delta}_k \xi_k = \alpha$.

$$\Rightarrow \|f\| \ge \frac{\alpha}{\liminf \|x_n\|} \Rightarrow \|f\| \ge \alpha.$$

Daí:
$$I = \sum \bar{\delta}_k \delta_k = \sum \bar{\delta}_k (G(f_k) - \xi_k) = G(f) - \|f\| = \|f\| \Big(\underbrace{\frac{G(f)}{\|f\|}}_{\le \|G\|} - 1 \Big) \le 0$$

□

<u>Definição</u>: X é reflexivo se $\iota : X \to X^{**}$ é sobrejetor.

<u>Obs</u>: X reflexivo $\Longrightarrow$ X Banach.

<u>Propriedades de espaços reflexivos</u>

- Se X é reflexivo, então X^* é reflexivo.
- Se X é reflexivo e $L \subset X$ ~~fechado~~, subespaço fechado, então L é reflexivo.

<u>Teorema</u>: X reflexivo $\Longleftrightarrow B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ é fracamente compacto.

<u>Prova</u>. ① Se X é refl., então $B = B^{**}$ é fraca* - compacto por Banach-Alaoglu. Ou seja, B é compacto em relação com a top. induzida por X^*.

② Suponha que $G \in B^{**}$. Para $f \in X^*$, defina

$$M(f) := \{ x \in B : f(x) = G(f) \},$$

que é fechado. Pelo corolário anterior de Goldstine, a interseção finita ~~de~~ $\bigcap_{k=1}^{n} M(f_k) \neq \emptyset$.

Porém, como B é compacto, a "finite intersection property" implica que

$$\bigcap_{f \in X^*} M(f) \neq \emptyset.$$

$\Longrightarrow \exists x \in X : G(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*$ $\square$

Teorema: Seja X reflexivo. Então,

B é sequencialmente compacto na topologia fraca.

Prova. Seja X separável $\Rightarrow X^{**}$ separável. Vemos

supor que X^* tb. é separável. (Exercício).

$\Rightarrow B^{**}$ satisfaz o 1º axioma de enumerabilidade e é

compacto na top. fraca*.

$\Rightarrow$ compacidade sequencial.

O caso geral: Seja (x_n) sequência e $X = \overline{\text{span}\{x_i\}}$

$\square$

Teorema (Eberlein)

X reflexivo $\Leftrightarrow$ B é fracamente seq. compacto.

Teorema (EBERLEIN - SMULIAN)

Seja X Banach e $A \subset X$. Então são equivalentes:

(1) Qualquer $(x_n) \subset A$ possui uma subseq. fracamente convergente

(2) O fecho de A na top. fraca é frac. compacto.

Convexidade uniforme

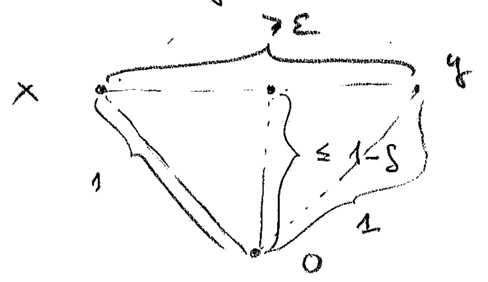
Exemplos: L^p, $1<p<\infty$ (Teo. de Clarkson)

Milman: uniforme convexo $\Rightarrow$ reflexivo.

Definição: Seja X normado. Então X é unif. convexo se

(1) para $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$: $\forall$ x, y, $\|x\|, \|y\| \le 1$:

$$\|x-y\| \ge \varepsilon \implies \tfrac{1}{2}\|x+y\| \le 1-\delta$$



Propriedades equivalentes:

(2) Se (x_n), (y_n) são sequências com $\|x_n\|=\|y_n\|=1$ e

$$\lim \|\tfrac{1}{2}(x_n+y_n)\| = 1, \text{ então } \lim_{n\to\infty} x_n - y_n = 0$$

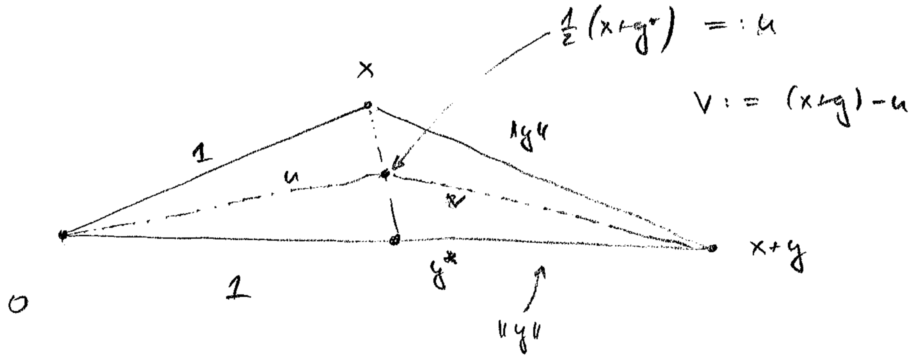
Definição: X chama-se estritamente normado se, para qualquer $x, y \neq 0$ com $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$, $\exists \lambda>0 : x=\lambda y$.

INGLÊS: strictly normed or rotund

Proposição: unif. convexo $\Rightarrow$ estritamente normado.

Prova: $\|x\|=1$, $y\neq 0$ t.q. $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$.

Define $y^* := \frac{1}{\|x+y\|}(x+y)$



$$\|x+y-y^*\| = \|(1-\tfrac{1}{\|x+y\|})(x+y)\| = \frac{\|x+y\|}{\|x+y\|}(\|x+y\|-1) = \|y\|$$

Convex.
$\Rightarrow$ $\|u\| \le 1$; $\|v\| \le \|y\|$.

Caso $u+v = x+y$: $\|x+y\| \le \|u\|+\|v\| \le \|x\|+\|y\|$.

$\Rightarrow \|u\| = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y^* = \frac{1}{\|x+y\|}(x+y)$

$\Rightarrow \quad y = \left(\|x+y\| - 1\right) x = \|y\| \cdot x$ $\square$

<u>Observação</u>: A prova não usa a uniformidade da convexidade.

<u>Teorema</u>. Seja X normado, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $W \subset X$ fechado e convexo.

① Se X é estrit. normado, então, para cada $x \in X$:

$$\#\{w \in W : \|x-w\| = \inf\{\|x-v\| : v \in W\}\} \leq 1.$$

② Se X é unif. convexo, então para cada $x \in X$ $\exists!\, w \in W$:

$$\|x-w\| = \inf\{\|x-v\| : v \in W\}$$

<u>Prova</u>. S.p.g. $x = 0$, $\inf\{\|v\| : v \in W\} = 1$.

① Suponha que $u, v \in W$ com $\|u\| = \|v\| = 1$. Então

$$1 \leq \|\underbrace{\tfrac{1}{2}(u+v)}_{\in W}\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\|u\| + \|v\|\right) = 1$$

$\overset{\text{est. nor.}}{\Rightarrow} u = v$.

② Escolha $(x_n) \in W$ com $\lim \|x_n\| = 1$.
<u>Vamos mostrar que (x_n) é Cauchy</u>: Suponha que não. Daí, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que, para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $n, m > N$ com $\|x_n - x_m\| > \varepsilon$.

Daí, existe uma subsequências (n_k), (m_k) tal que

- $\lim \|x_{n_k}\| = \lim \|x_{m_k}\| = 1$
- $\|x_{n_k} - x_{m_k}\| \geq \varepsilon$

Além disso, pela convexidade de W:

$$1 \leq \|\tfrac{1}{2}(x_{n_k} + x_{m_k})\| \leq \tfrac{1}{2}\left(\|x_{n_k}\| + \|x_{m_k}\|\right) \longrightarrow 1.$$

Porém, isto é uma contradição a convexidade uniforme. $\square$

<u>Teorema (Clarkson)</u>: Os espaços $\mathcal{L}^p(\mu)$ são uniformemente convexos para $1 < p < \infty$.

O teorema de Milman - Pettis

Um espaço de Banach X uniformemente convexo é reflexivo.

Prova. Vamos mostrar que $\iota : X \to X^{**}$ é sobrejetor. Caso 1 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Seja $G \in X^{**}$ com $\|G\| = 1$. Então, existe (f_n) em X^* tal que $G(f_n) \to 1$. S.p.d.g $G(f_n) > 1 - \frac{1}{n}$

Como $\iota(X)$ é denso em X^{**}: $\exists\ (x_n)$ em X tal que

- $\|x_n\| \leq 1 \quad \forall n$
- $|f_i(x_n) - G(f_i)| < \frac{1}{n} \quad \forall \; i = 1, \dots n.$

$$\Rightarrow f_i(x_n) > 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{i} \quad \forall \; n, \quad i \leq n.$$

$$\Rightarrow 2 \geq \|x_n\| + \|x_i\| \geq \|x_n + x_i\| \geq f_i(x_n) + f_i(x_i)$$

$$\geq 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{i} + 1 - \frac{2}{i} \geq 2 - \frac{4}{i} \xrightarrow{i \to \infty} 2.$$

Usando o argumento da prova do teorema da aproximação, segue que (x_n) é Cauchy.

$\Rightarrow \exists\ x_\infty := \lim_{n \to \infty} x_n$. Em particular:

$$f_i(x_\infty) = G(f_i). \text{ para qualquer } i \in \mathbb{N}, \text{ e } \|x_\infty\| = 1. \qquad (*)$$

Basta mostrar que $G(f) = f(x_\infty) \quad \forall f \in X^*$:

1ª observação: Suponha que x_∞, z satisfazem $(*)$. Então, a sequência $(x_\infty, z, x_\infty, z, \dots)$ satisfaz as condições de (x_n) em cima.

$\Rightarrow$ A sequência é Cauchy $\Rightarrow x_\infty = z$.

2ª observação. Seja f qualquer. Substituindo (f_n) com $(f, f_1, f_2, \dots)$, obtém-se que $G(f) = f(\tilde{z})$, onde $\tilde{z}$ é o limite em cima

pela unicidade da 1ª Observação: $\tilde{z} = z_\infty$. $\Rightarrow G(f) = f(x_\infty) \; \forall f$.

$\Rightarrow X$ reflexivo.

Caso 2 : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seja $X_{\mathbb{R}}$ o espaço X com multiplicação escalar com elementos em $\mathbb{R}$. Em particular, $X_{\mathbb{R}}$ é $\mathbb{R}$-Banach.

Além disso, se $f \in X_{\mathbb{R}}^*$, $f(\lambda x) := \lambda f(x)$, para $\lambda \in \mathbb{C}$, define uma isometria $X_{\mathbb{R}}^* \longrightarrow X_{\mathbb{C}}^*$ (Exercício).

$\Longrightarrow$ Ou seja:

$$X_{\mathbb{C}} \cong X_{\mathbb{R}} \cong X_{\mathbb{R}}^{**} = (X_{\mathbb{R}}^*)^* \cong (X_{\mathbb{C}}^*)^* = X_{\mathbb{C}}^{**}$$ □

Corolário. $L^p(\mu)$ é reflexivo, para $1 < p < \infty$.

Definição. O espaço normado tem a propriedade de Radon-Riesz se $x_n \longrightarrow x$ fracamente e $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$, então $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

Observação. $x_n \longrightarrow x$ fracamente $\Longleftrightarrow$ $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ $\forall f \in X^*$

Banach-Steinhaus
$\Longrightarrow$ $\sup_n \| \iota(x_n) \| < \infty$ $\Longrightarrow$ $\sup \|x_n\| < \infty$.

Teorema. Uniformemente convexo $\Longrightarrow$ Radon Riesz.

Prova. Suponha que $x_n \longrightarrow x$ fracamente e $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$.

s.p.d.g. $x_n, x \neq 0$ $\forall n$ (basta ser um elemento em X "grande")

$$\Longrightarrow \frac{1}{\|x_n\|} x_n \longrightarrow \frac{1}{\|x\|} x \text{ fracamente}$$

Daí, s.p.d.g. $x_n \longrightarrow x$ fracamente e $\|x_n\| = \|x\| = 1$ $\forall n$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}(x_n + x) \longrightarrow x \text{ fracamente}$$

Por Banach-Steinhaus:

$$1 = \|x\| \leq \liminf_n \tfrac{1}{2}(x_n + x) \leq 1$$

$$\Longrightarrow \|x_n - x\| \longrightarrow 0$$ □

Referências. Megginson: An introduction to Banach space theory.

Capítulo 2 weak e weak* com sequências generalizadas

Incluindo: · Teorema de Goldstine (2.6.26)

· Teorema de Eberlein-Smulian (2.8.6), com prova

Capítulo 5: Rotundity / Convexidade

Teorema: Seja $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$. Então,

$$j : \mathcal{L}^p(\mu) \longrightarrow \mathcal{L}^q(\mu)^*, \qquad f \longmapsto \left(g \longmapsto \int fg \, d\mu \right)$$

é uma isometria sobrejetora.

Prova: Já mostramos que $j(\mathcal{L}^p(\mu)) \hookrightarrow \mathcal{L}^q(\mu^*)$ isometricamente $\Rightarrow j(\mathcal{L}^p(\mu))$ fechado.

Seja $\varphi \in (\mathcal{L}^q)^* \setminus j(\mathcal{L}^p)$. Por Hahn-Banach, existe

$G \in (\mathcal{L}^q)^{**}$: $G|_{j(\mathcal{L}^p)} = 0$, mas $G(\varphi) \neq 0$.

Como $\mathcal{L}^q$ é reflexivo, existe $g \in \mathcal{L}^q$ tal que

$$G(\psi) = \psi(g) \quad \forall \psi \in (\mathcal{L}^q)^*$$

Porém:

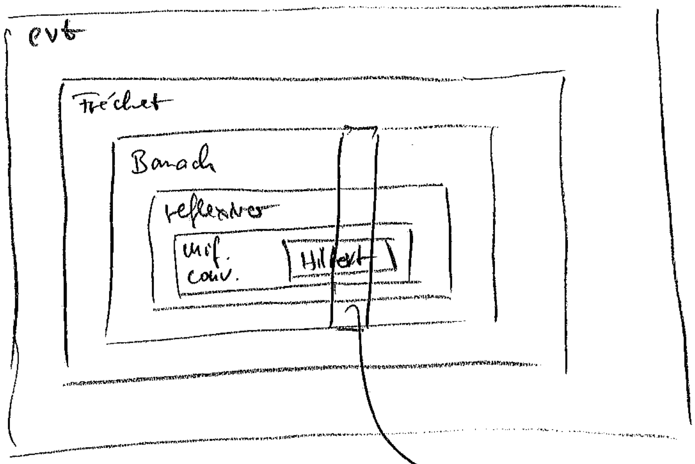
$$G(j(f)) = j(f)(\psi) = \int f \psi \, d\mu = 0 \quad \forall f \in \mathcal{L}^p$$

$$\Rightarrow \psi = 0 \text{ q.t.p} \Rightarrow G = 0, \text{ absurdo} \qquad \square$$

Observação: $\mathcal{L}^\infty(\mu) \cong (\mathcal{L}^1(\mu))^*$.

Espaços de Hilbert

Intuito: Dar mais uma classe importante de espaços vetoriais topológicos.



$\mathcal{L}^p$, $1 \le p \le \infty$.

Observação: Vamos ver que espaços de Hilbert são os mais próximos a espaço euclideano. Em particular: Qualquer subespaço de dimensão finito é isométrico a um $(\mathbb{K}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Relevância: (i) Bases ortonormais (e.g. Fourier)

(ii) Teoria espectral.

Def. Seja X um espaço vetorial. Então, uma aplicação $\langle \, , \, \rangle : X^2 \longrightarrow \mathbb{K}$ chama-se "forma Hermitiana" ou "forma sesquilinear" se

- $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$.

$\alpha \in \mathbb{K}$, $x, x', y \in X$

Em particular:

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle .$$

$$\langle x, x \rangle \in \mathbb{R} .$$

Se $\langle x,x\rangle = 0 \iff x=0$, então $\langle\cdot,\cdot\rangle$ diz-se produto interno.

Se $\langle x,x\rangle \geq 0 \quad \forall x$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é pos. semi-def.

<u>Exemplo:</u> $X = \mathcal{L}^2(\Omega,\mu)$, $\langle f,g\rangle := \int f\bar{g}\,d\mu$.

<u>Generalização.</u> $X^* \times X \longrightarrow \mathbb{K}$, $(f,x) \longmapsto f(x)$, no caso de um espaço de Banach.

<u>Teorema</u> (Cauchy-Schwarz) Seja $\langle\,,\rangle$ pos. semi. def.

<u>Então:</u> $$|\langle x,y\rangle|^2 \leq \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle$$

Além disso, se $\langle\,,\rangle$ é produto interno:

$$|\langle x,y\rangle|^2 = \langle x,x\rangle\cdot\langle y,y\rangle \implies x = \lambda y \quad \left(\text{para } \lambda = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\right).$$

<u>Prova.</u> Seja $\lambda \in \mathbb{K}$, Então

$$0 \leq \langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle x,x\rangle + \lambda\langle y,x\rangle + \bar{\lambda}\langle x,y\rangle + |\lambda|^2\langle y,y\rangle.$$

<u>Suponha que $\langle y,y\rangle \neq 0$.</u> Então, para $\lambda = -\dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$:

$$0 \leq \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$$

$$= \langle x,x\rangle - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$$

$\implies$ CS.

<u>Suponha que $\langle y,y\rangle = 0$.</u> Então, para $\lambda = -\langle x,y\rangle$:

$$0 \leq \langle x,x\rangle - 2|\langle x,y\rangle|^2$$

$$\overset{\forall t\in\mathbb{R}}{\implies} \langle x,x\rangle \geq 2|\langle x,y\cdot t\rangle|^2 = 2t^2|\langle x,y\rangle|$$

$\implies \langle x,y\rangle = 0. \implies$ CS. $\square$

Propriedades básicas

① Seja X $\mathbb{K}$-espaço vetorial e $\langle \cdot , \cdot \rangle$ produto interno.

Então $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ é norma e

$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua.

② Seja X normado. Então são equivalentes:

(a) $\exists \ \langle \cdot , \cdot \rangle$ tal que $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$

(b) $\frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad \forall x,y$

LEI DO PARALLELOGRAMA

Para (2):

(a ⇒ b): $\langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 + \cancel{\langle y,x\rangle} + \cancel{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 + \|x\|^2 - \cancel{\langle y,x\rangle} - \cancel{\langle x,y\rangle} + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.

(b ⇒ a). Suponha que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Define

$$\langle x,y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

Então: $\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}\left(4\|x\|^2 - 0 + 2i\|x\|^2 - 2i\|x\|^2\right) = \|x\|^2$.

ou seja, não precisa-se a ▱-regra.

Vamos mostrar que $\langle \cdot,\cdot\rangle$ é linear na 1ª componente:

① $4\langle x+y, z\rangle = \underbrace{\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2}_{Re} + i\underbrace{\left(\|x+y+iz\|^2 - \|x+y-iz\|^2\right)}_{Im}$.

Mas. $\|x+y+z\|^2 \overset{①}{=} 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+z-y\|^2$

$\overset{②}{=} 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y+z-x\|^2$

$$\Rightarrow \|x+y+z\| = \frac{1}{2}① + \frac{1}{2}②$$

$$= \|x+z\|^2 + \|y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \underbrace{\frac{1}{2}\left(\|x-y+z\|^2 + \|-x+y+z\|^2\right)}_{=\|x-y\|^2 + \|z\|^2}$$

$$\|x+y-z\| = \|x-z\|^2 + \|y\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 - \frac{1}{2}\left(\|x-y-z\|^2 + \|-x+y-z\|^2\right)$$

$\Rightarrow \|x+y+z\| - \|x+y-z\| = \|x+z\| - \|x-z\| + \|y+z\| - \|y-z\|$.

A parte imaginária usa o mesmo argumento.

② Para $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$:

$$\left\langle \frac{m}{n}x, y\right\rangle = \frac{n}{n}\cdot\left\langle \frac{m}{n}x, y\right\rangle \overset{①}{=} \frac{1}{n}\langle mx, y\rangle \overset{(1)}{=} \frac{m}{n}\langle x, y\rangle.$$

Como $\|\cdot\|$ é contínua, então $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é contínua

$\Rightarrow \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

③
$$\begin{aligned} 4\langle ix, y\rangle &= \|ix+y\| - \|ix-y\| + i\|ix+iy\| - i\|ix-iy\| \\ &= \|x-iy\| - \|x+iy\| + i\|x+y\| - i\|x-y\| \\ &= i\left(\|x+y\| - \|x-y\| + i\|x+iy\| - i\|x-iy\|\right). \end{aligned}$$

$\overset{2,3}{\Longrightarrow} \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

④ $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle \Longrightarrow$ ex.

O caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ é mais simples $\left(\langle x, y\rangle := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)\right)$ □

O processo atrás da prova chama-se "LOCALIZAÇÃO":

$$\begin{array}{c} \varphi : X^2 \to \mathbb{K} \\ \downarrow \\ x \mapsto \varphi(x,x) \\ \downarrow \\ \langle\, , \rangle = \frac{1}{4}\left(\text{———} \right). \end{array}$$

Parecido com formas quadráticas $\longleftrightarrow$ formas bilineares.

$\longleftrightarrow$ matrizes simétricas

<u>Def.</u> $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é espaço de Hilbert se X é espaço vetorial, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é produto interno e X é completo em relação com a norma $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$

<u>Corolário da lei do paralelogramo:</u>

Se $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é espaço vetorial com produto interno, então $\overline{X}$ é espaço de Hilbert

<u>Prova.</u> A lei do paralelogramo estende-se continuamente a $\overline{X}$.

$\Rightarrow$ a norma de $\overline{X}$ vem de um produto interno, que é a extensão contínua de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pela polarização. $\square$

No caso de um espaço de Hilbert, o dual tem a forma seguinte:

<u>Teorema (Representação de Riesz).</u>

Seja X Hilbert e $j: X \to X^*$, $y \longmapsto \overbrace{(x \longmapsto \langle x,y\rangle)}^{j_y(x)}$. Então:

(1) j é aditivo ($j_{y+z} = j_y + j_z$) e antilinear ($j_{\alpha x} = \bar{\alpha} j_x$).

(2) j é uma isometria sobrejetora.

<u>Prova.</u>

① Pela definição e a continuidade de $\langle\cdot,\cdot\rangle$

② j é isometria pois:

- $|j_y(x)| = |\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$. $\Rightarrow \|j_y\| \le \|y\|$.
- $|j_y(y)| = |\langle y,y\rangle| = \|y\|^2 \Rightarrow \|j_y\| \ge \|y\|$.

<u>Basta mostrar que j é sobrejetor:</u>

Pela lei do paralelogramo, para $x,y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$:

$$\|x+y\|^2 = 2(1+1) - \|x-y\|^2$$

$$\Rightarrow \left\|\tfrac{1}{2}(x+y)\right\| = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}\|x-y\|^2}$$

$\Rightarrow X$ unif. convexo

Ou seja, por Milman-Pettis, X é reflexivo

Suponha que $j(X) \neq X^*$. Por continuidade, $j(X)$ é fechado

$\overset{HB}{\Longrightarrow} \exists\, F \in X^{**}$ tal que $F \neq 0$, $F \circ j = 0$.

Como X é reflexivo: $\exists\, x \in X$: $F = \iota(x)$.

$\Rightarrow 0 = \iota(x) \circ j(y) = \langle x, y \rangle \quad \forall y \quad \Rightarrow x = 0$ ↯.

<u>Uma abordagem alternativa (para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)</u>

Seja $f \in X^* \setminus j(X)$ com $\|f\| = 1$. Daí, existe

(x_n) ~~tal que~~ $|f(x_n)| \longrightarrow 1$ e $\|x_n\| = 1$. S.p.d.g.

$$1 - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq 1$$

$$\Rightarrow f(x_n + x_m) \geq 2 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) \overset{\|f\|=1}{\Longrightarrow} \|x_n + x_m\| \geq 2 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

<u>Parel.:</u>

$$\|x_n - x_m\|^2 = 4 - \|x_n + x_m\|^2 \leq 4 - \left(2 - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\right)^2$$

$$= 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)^2 \leq 4\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

$\Rightarrow (x_n)$ é Cauchy.

Seja $y := \lim x_n$. Para $x \in X$ e $\lambda > 0$; usando que $\|y\| = F(y) = 1$:

(a) $\frac{1}{\lambda}\left(\|y - \lambda x\| - \|y\|\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\|y - \lambda x\| - 1\right)$

$$\geq \frac{1}{\lambda}\left(|F(y - \lambda x)| - F(y)\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(F(y - \lambda x) - F(y)\right) \qquad \lambda \text{ pq.}$$

$$= -F(x).$$

$\|y + \lambda x\|^2 = \|y\|^2 + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\|x\|^2$

(b) $F(x) = \frac{1}{\lambda}\left(F(y + \lambda x) - F(y)\right) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\|y + \lambda x\| - \|y\|\right)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\lambda}\left(\|y - \lambda x\| - \|y\|\right) \leq F(x) \leq \frac{1}{\lambda}\left(\|y + \lambda x\| - \|y\|\right)$$

Agora basta aplicar l'Hôpital para mostrar que $\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\left(\|y \pm \lambda x\| - \|y\|\right) = \pm\langle x, y\rangle$