Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise Funcional (doutorado), 2024-1
Manuel Stadlbauer

Questão 4.1. Seja $e_i = \left(e_i^{(k)} : k \in \mathbb{N}\right) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ dado de $e_i^{(i)} = 1$ e $e_i^{(k)} = 0$ para $i \neq k$. Mostre que $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ não é uma base de Schauder.

5 Topologias fracas

Questão 5.1. Seja X um espaço normado. Qual seria o fecho fraco de $\{x \in X \,:\, \|x\| = 1\}$?

Questão 5.2. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Mostre que existe um espaço topologico compacto de Hausdorff K e uma isometria

$$\iota : (X, \|\cdot\|) \to (C(K), \|\cdot\|_\infty).$$

Questão 5.3. Seja X um espaço vetorial normado separável e (f_n) uma seqüência em X^* com $\sup_n \|f_n\| < \infty$. Mostre que existe uma subsequência (f_{n_k}) convergente na topologia fraca-$*$.

6 Espaços de Hilbert

Questão 6.1. Seja X um espaço de Hilbert. Prove que $x_n \to x$ em X se e somente se $\|x_n\| \to \|x\|$ e $x_n \rightharpoonup x$.

Questão 6.2. Determine $V^\perp$ para

$$V := \left\{(x_i : i \in \mathbb{N}) \in \ell^2(\mathbb{N}) \,:\, \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i = 0\right\}.$$

Questão 6.3. Sejam μ uma medida finita e

$$V := \left\{f \in \mathscr{L}^2(\mu) \,:\, \int f \, d\mu = 0\right\}.$$

Determine $V^\perp$. O que aconteceria se μ fosse uma medida σ-finita?

Questão 6.4. Sejam H um espaço de Hilbert e $B = (e_n \,:\, n \in \mathbb{N}) \subset H$ uma sequência de vetores ortonormais. Mostre que $e_n \xrightarrow{\text{fraca}} 0$.

Questão 6.5. Seja $X = \ell^2(\mathbb{N} \cup \{0\})$.

a) Mostre que $(a_n) \in X$ implica que o raio de convergência de $\sum a_n \lambda^n$ é maior ou igual a 1.
b) Sejam $|\lambda| < 1$ e
$$L_\lambda : X \to \mathbb{F}, (x_i) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} x_n \lambda^n.$$
Determine $h \in X$ tal que $L_\lambda(x) = \langle h, x\rangle$ e $\|L_\lambda\|$.
c) Sejam $|\lambda| < 1$ e
$$L_\lambda : X \to \mathbb{F}, (x_i) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot x_n \lambda^n.$$
Determine $h \in X$ tal que $L_\lambda(x) = \langle h, x\rangle$ e $\|L_\lambda\|$.

Questão 6.6. Ortonormalise $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\} \subset L^2([-1,1])$.

Questão 6.7. Sejam X, Y espaços de Hilbert e $U : X \to Y$ uma aplicação linear. Mostre que U é uma isometria se e somente se $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ $\forall x, y \in X$.

Questão 6.8. Seja X um espaço de Hilbert, $U : X \to X$ unitário e $E := \{x \in X : Ux = x\}$. Mostre que
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U^i \to P_E.$$
Dica. Mostre que $H = \{x - Ux + y : x \in X, y \in E\}$ é denso.