2024 - 1

Análise Funcional

- conteúdo -

arquimedes.nce.ufrj.br / dm / manuel

Consequências do teorema de Baire

① O teorema de Banach - Steinhaus / Princípio da limitação uniforme

<u>Teorema</u> Seja X Banach e Y normado. Além disso, suponha que M é um conjunto em $L(X,Y) = \{T : X \to Y \mid \text{lin. cont.}\}$.
Se $\sup\{\|Tx\| : T \in M\} < \infty \;\; \forall x \in X$, então $\sup\{\|T\| : T \in M\} < \infty$.

<u>Prova.</u> Pelo teorema anterior, $\exists\, x_0 \in X,\ r > 0$ tal que
$$c := \sup\{\|Tx\| : T \in M, \|x - x_0\| < r\} < \infty.$$
Daí, para $x \in X$ com $\|x\| = 1$ e $T \in M$:
$$\|Tx\| = \frac{1}{r}\|T(rx)\| = \frac{1}{r}\|T(rx + x_0 - x_0)\|$$
$$\leq \frac{1}{r}\|T(rx + x_0)\| + \frac{1}{r}\|T(x_0)\| \leq \frac{2c}{r} < \infty. \quad \square$$

<u>Corolários</u>

① <u>Banach - Steinhaus clássico:</u> Seja $T_n : X \to Y$ sequência em $L(X,Y)$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_n(x) =: Tx \quad \forall x \in X$
(X Banach, Y normado). Então, $T \in L(X,Y)$.

<u>Prova:</u> Ex. $\square$

② Seja X normado, $M \subset X$. Então, se $\sup_{x \in M} |f(x)| < \infty$ $\forall f \in X^*$, então $\sup\{\|x\| : x \in M\} < \infty$.

<u>Prova.</u> $\iota X \subset X^{**}$. Daí, para qualquer $f \in X^*$, $\sup\{\iota_x(f) : x \in X\} < \infty$.

Basta notar que X^* é completo, $\|\iota_x\| = \|x\|$ e aplicar P.L.U.: $\sup\{\|\iota_x\| : x \in M\} = \sup\{\|x\| : x \in M\} < \infty$ $\square$

Um outro ponto de vista

Proposição: Seja X Banach, Y normado e $M \subset L(X,Y)$ tal que $\sup\{\|T\| : T \in M\} = \infty$. Então,

$$J := \{x \in X : \sup_{T \in M} \|Tx\| < \infty\} \text{ é magro.}$$

(i.e. contida numa união enumerável de conjuntos raros (i.e. interior do fecho $= \emptyset$)).

Prova: Seja $E_k := \{x : \sup_{T \in M} \|Tx\| \leq k\}$. Então, $J = \bigcup_k E_k$, e os E_k são fechados. Porém, pelo P.L.U, o interior de E_k é vazio. $\Rightarrow$ J magro $\square$

O teorema da aplicação aberta

Teorema: Seja X, Y Banach e $T \in L(X,Y)$ sobrejetor. Então, T é aberto.

Prova: Vamos provar o teorema em 4 passos.

Passo 1: Vamos mostrar que, se $\mathcal{U}$ aberto, $0 \in \mathcal{U}$, então $\overline{T(\mathcal{U})}$ contém um aberto:

Pela hipótese, $\exists\, r > 0 : B_r(0) \subset \mathcal{U}. \Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\mathcal{U}$

Como T é sobrejetor: $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} T(n\mathcal{U})$.

Pelo teorema de Baire: $\exists\, n : n\overline{T(\mathcal{U})}$ contém um aberto.

$\Rightarrow \overline{T\mathcal{U}}$ contém um aberto.

Passo 2: Vamos mostrar que $\exists\, r > 0$ t.q. $B_r(0) \subset \overline{T\mathcal{U}}$;

Caso $0 \in \mathcal{U}$, $\exists\, V$ aberto ($0 \in V$) tal que o conjunto

$$V - V := \{x - y : x \in V, y \in V\} \subset \mathcal{U}.$$

Daí, $\overline{T\mathcal{U}} \supset \overline{TV - TV} \supset \overline{TV} - \overline{TV} \supset W - W$

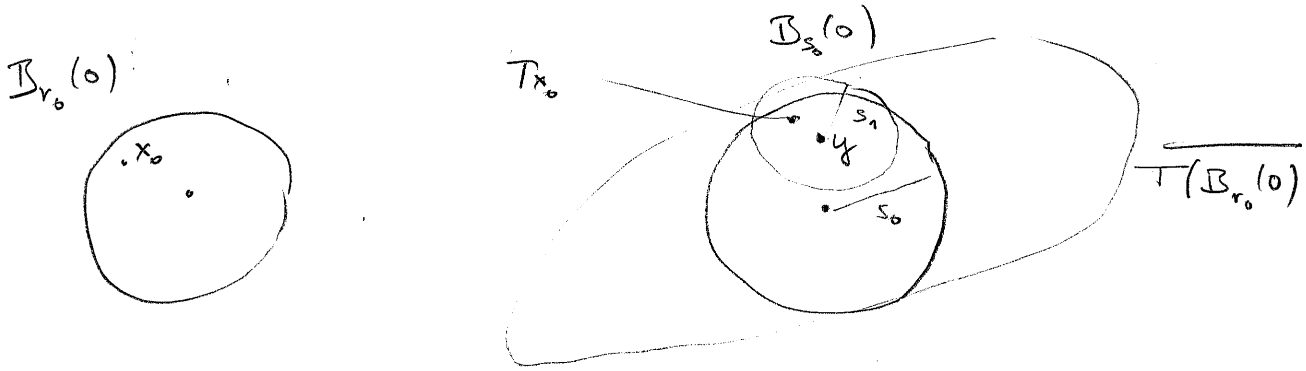
onde W é aberto pelo passo 1, aplicado a V.

Mas $V-V = \bigcup_{x\in V} \{x\}-V$ é aberto e $0\in V-V$.

<u>Passo 3:</u> Vamos mostrar que, para qualquer $\mathcal{U}$ aberto, $0\in\mathcal{U}$, $\mathcal{U}\subset X$ existe V aberto, $0\in V$, $V\subset Y$ tal que $T\mathcal{U}\supset V$.

(*) Seja $r_i>0$ $\forall i\geq 0$ e $\sum r_i =: \varepsilon < \infty$. Pelo anterior, para qualquer i, existe s_i tal que $B_{s_i}(0)\subset \overline{T(B_{r_i}(0))}$. Como $\|T\|<\infty$, $s_i\to 0$.

Agora suponha que $y\in B_{s_0}(0)$. Vamos construir $x\in B_{r_0}(0)$ tal que $Tx=y$:



$\overline{T(B_{r_0}(0))}\supset B_{s_0}(0)$ implica que y é ponto de aderência de $T(B_{r_0}(0))$. Daí, existe x_0 com $d(y,T(x_0))<s_1$ e $x_0\in B_{r_0}(0)$.

$\Rightarrow y-T(x_0)\in B_{s_1}(0)$

Pelo mesmo argumento: Existe $x_1\in B_{r_1}(0)$ tal que

$y-T(x_0)-T(x_1)\in B_{s_2}(0)$

<u>Por indução:</u> ~~Existe~~ existem $x_n\in B_{r_n}(0)$ com

$$y-\sum_{i=0}^{n} Tx_i \in B_{s_n}(0)$$

<u>Mas</u> $\left(\sum_{i=0}^{n} Tx_i\right)$ é sequência de Cauchy por (*)

$$\Rightarrow x = \sum_{i=0}^{\infty} Tx_i \in X, \quad \|x\|\leq\varepsilon$$

e $Tx=y$. Daí, $T(\overline{B_\varepsilon(0)})\supset B_{s_0}(0)$,

<u>Alerta:</u> $T(\overline{U})\subset\overline{T(U)}$

Daí, dado $\mathcal{U}$, escolhe $\varepsilon > 0$ tal que $B_{2\varepsilon}(0) \subset \mathcal{U}$

$$\Rightarrow T(\mathcal{U}) \supset T(B_{2\varepsilon}(0)) \supset T(\overline{B_\varepsilon(0)}) \supset B_\delta(0).$$

Passo 4: Seja $\mathcal{U} \subset X$ aberto. Então, para $x \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} - \{x\}$ é vizinhança de 0 $\Rightarrow \exists V$ aberto, $0 \in V$ t.q. $T(\mathcal{U} - \{x\}) \supset V$

Mas $T(\mathcal{U} - \{x\}) = T\mathcal{U} - \{Tx\} \supset V$

$$\Rightarrow T\mathcal{U} \supset V + \{Tx\} \Rightarrow T \text{ ap. aberta} \qquad \square$$

Consequências do Teorema da Aplicação aberta:

Teorema (Operador inverso): Sejam X, Y Banach e $T \in L(X,Y)$ bijetor. Então $T^{-1} \in L(Y,X)$.

Proposição: Sejam $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ normas em X tal que X é Banach em relação com estas normas. Se
$$\{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ aberto a rel. com } \|\cdot\|_1\} \subset \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ aberto} - \|\cdot\|_2\}$$
então as topologias são iguais.

Prova: $id : (X, \|\cdot\|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ é contínua e então aberta. $\square$

O teorema do gráfico fechado

Se X, Y são normados, então $(X \times Y, \|\cdot\|_X + \|\cdot\|_Y)$ é normado. Além disso, o produto é Banach $\Leftrightarrow X$ e Y são Banach.

Para $T \in L(X,Y)$, define
$$\mathcal{G}(T) := \{(x, Tx) : x \in X\} \subset X \times Y.$$

Teorema (do gráfico fechado). Sejam X, Y Banach, e $T: X \to Y$ linear. Então:

$$T \text{ contínua} \iff \mathcal{G}(T) \text{ fechado}$$

Prova:

(1) Se T é contínua, então para qualquer sequência $((x_n, Tx_n))$ de Cauchy em $\mathcal{G}(T)$, (x_n) é Cauchy. Pela completitude de X, $x = \lim x_n$ existe.
Pela completitude de Y e a continuidade de T, $y = \lim T(x_n)$ existe. Daí, $\lim_n (x_n, Tx_n) = (x, y) \in X \times Y$.

(2) Como T é linear, $\mathcal{G}(T)$ é subespaço. Daí, se $\mathcal{G}(T)$ é fechado, $\mathcal{G}(T)$ é Banach.
Além disso,
$\pi_1 : \mathcal{G}(T) \longrightarrow X$, $(x, Tx) \longrightarrow x$
é uma aplicação contínua e bijetora.
$\xRightarrow{\text{op. inversa}}$ π_1^{-1} é contínua. Seja $\pi_2(x, y) := y$.
Como π_2 é contínua, $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ é contínua □

Uma classe de exemplos relevantes – $\mathcal{L}^p$

Revisão da teoria da medida

Def.: Uma σ-álgebra $\mathcal{A}$ é um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$ tal que

① $\emptyset \in \mathcal{A}$

② $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

③ Se $A_i \in \mathcal{A}$ para $i \in \mathbb{N}$, então $\bigcup A_i \in \mathcal{A}$.

Def. Uma medida é uma aplicação $m: \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que

① $m(\emptyset) = 0$

② se (A_i) é uma sequência em $\mathcal{A}$, 2-2 disjuntos, então

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} m(A_i) = m\Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\Big)$$

Teoremas:

① Lema de Fatou:

Seja (f_n) uma sequência de funções mensuráveis positivas. Então

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Ex. μ = Lebesgue, $f_n = \mathbb{1}_{[n, n+1]}$.

② Teorema da convergência monótona:

(f_n) mensurável tal que $0 \leq f_0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n$.

$$\Rightarrow \lim \int f_n \, d\mu = \int \lim f_n d\mu$$

③ Teorema da convergência dominada:

Suponha que (f_n) é sequência de funções mensuráveis tal que $\int \limsup |f_n| \, dm < \infty$. Então,

$$\lim \int f_n \, dm = \int \lim f_n \, dm.$$

④ Riesz representation theorem: Suponha que X é loc. compacto e Hausdorff. Então, para cada $f: C_c(X) \to \mathbb{R}$ linear tal que $\varphi \geq 0$ implica $f(\varphi) \geq 0$,

existe uma medida m tal que $f(\varphi) = \int \varphi \, dm$, $\forall \varphi \in C_c(\mathbb{R})$.
Além disso, $m(K) < \infty$ $\forall K$ compacto, e m é regular.

<u>Os espaços $\mathcal{L}^p(X)$</u>

Seja m uma medida. Então, para $p \in [1, \infty]$, define

$$\mathcal{L}^p(m) = \begin{cases} \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ mensurável e } \int |f|^p dm < \infty\} & : p < \infty \\ \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ mensurável e } \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty\} & : p = \infty \end{cases} \Big/ \sim$$

onde $f \sim g \iff \{x : f(x) \neq g(x)\}$ é conjunto de medida nula

$$\iff m(\{ \quad " \quad \}) = 0.$$

<u>Lema.</u> Se $\int |f|^p dm = 0$, então $m(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$.

<u>Teorema.</u> $\mathcal{L}^p(m)$ é espaço normado completo em relação com

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int |f|^p dm\right)^{1/p} & : p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup} |f| & : p = \infty. \end{cases}$$

Vamos provar o teorema em algumas etapas:

① Obviamente, $\|f\|_p = \infty$ implica $m(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$.
Além disso, se $p = \infty$, então para $f, g \in \mathcal{L}^\infty(m)$ existe $\Omega \subset X$ com $m(\Omega^c) = 0$ e $\sup\{|f(x)| : x \in \Omega\} = \|f\|_\infty$ e $\sup\{|g(x)| : x \in \Omega\} = \|g\|_\infty$.

$$\Rightarrow |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in \Omega$$

$$\rightarrow \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

$$\Rightarrow (X, \|\ \|_\infty) \text{ é normado.}$$

Agora, suponha que (f_n) é uma sequência tal que, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M$:
$\operatorname{ess\,sup} |f_n - f_m| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq 0$. Daí, pela σ-aditividade de m, existe Ω : $m(\Omega^c) = 0$ e $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall n, m > M$.

Em escolher ε de um jeito "enumerável": $\exists\, \Omega$ de medida total tal que, $\forall \varepsilon > 0 \;\exists N$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \infty \quad \forall\, n,m > N,\; x \in \Omega$.

$\Rightarrow \lim f_n(x) = f(x)$ existe $\forall\; x \in \Omega$.

$\Rightarrow (X, \|\cdot\|_\infty)$ é completo.

(2) O caso $p = 1$:

$$\int |f+g|\, d\mu \leq \int |f| + |g|\, d\mu \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 .$$

$\Rightarrow \|\cdot\|_1$ é norma.

Para ver que $\mathcal{L}^p$ é completo, precisa-se usar o teorema de Riesz-Fischer (ou seja, não é conclusão imediata).

(3) Para mostrar que $\mathcal{L}^p$, $1 < p < \infty$ é normado, precisa-se da desigualdade de Hölder.

Lema, Se $a, b \geq 0$ e $p, q > 1$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} .$$

Prova. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff pq = p + q \iff p(q-1) = q$

(i) Se $b = a^{p-1}$, então $a^p/p + b^q/q = a^p(1/p + 1/q) = a^p = ab$.

(ii) Considere $f : b \mapsto \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} - ab$.

$\Rightarrow f' = b^{q-1} - a$, Além disso, $f(0) = \frac{a^p}{p}$, $f(\infty) = \infty$

$\Rightarrow f(b) \geq 0 \quad \forall b$.

Teorema. Se $\|f\|_p, \|g\|_q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, então

$$\int |f \cdot g|\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

[Desigualdade de HÖLDER]

Prova: S.p.d.g. $f \cdot g \neq 0$ num conjunto de medida positiva.

Daí, pelo lema anterior:

$$\frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q} \int |fg| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \frac{\int |f|^p d\mu}{\underbrace{\|f\|_p^p}_{=1}} + \frac{1}{q} \frac{\int |f|^q}{\underbrace{\|f\|_q^q}_{=1}} = 1$$

$$\Rightarrow \int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$ $\square$

Teorema (Minkowski) $\mathcal{L}^p$ é normado.

Prova. Basta mostrar que $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ para $p > 1$:

Mas $|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g| \leq |f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1}|g|$

Daí, se $\underline{|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q}$, para $1/q + 1/p = 1$, então
($\Leftrightarrow p+q = pq \Leftrightarrow p = \underline{q(p-1)}$)

$$\int |f+g|^p d\mu \leq \int |f+g|^{p-1}|f| \, d\mu + \int |f+g|^{p-1}|g| \, d\mu$$

$$\leq \| |f+g|^{p-1} \|_q \|f\|_p + \| |f+g|^{p-1} \|_q \|g\|_p$$

$$= \left(\int |f+g|^p \right)^{1/q} \left(\|f\|_p + \|g\|_q \right).$$

Ou seja, ou $\int |f+g|^p d\mu = 0$ ou

$$\left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{=1/p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Basta mostrar que $|f+g|^{p-1} = |f+g|^{p/q} \in \mathcal{L}^q$.

$\Leftrightarrow |f+g| \in \mathcal{L}^p$:

Mas $|f+g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p$

Como $\max\{|f|, |g|\} \in \mathcal{L}^p$, o teorema é provado $\square$

Corolário: A aplicação $\iota : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathcal{L}^q(\mu)^*$,

$\iota(f)(g) := \int f \cdot g \, d\mu$ é uma isometria.

Prova: Por Hölder, $\int |fg| \, d\mu \le \|f\|_p \|g\|_q < \infty$.

~~Daí segue~~ Além disso, segue de argumentos padrão que ι é bem definida (Escolhe um conjunto de medida total ...).

~~Como ι é obviamente linear e $\|\iota\| \le 1$ e $\iota \in$~~

Como ι é linear e $\|\iota(f)\| \le \|f\|_p$; obtém-se que $\|\iota\| \le 1$ e $\iota \in L(\mathcal{L}^p, (\mathcal{L}^q)^*)$.

Além disso, para $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, define $g := \begin{cases} 0 & : f(x) = 0 \\ \frac{\bar{f}}{|f|} |f|^{p-1} & : f(x) \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow |g|^q = |f|^{(p-1)\cdot q} = |f|^p .$$

Daí, $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Além disso,

$$\int fg \, d\mu = \int_{f \neq 0} f \bar{f} \cdot |f|^{p-2} \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu =$$

$$= \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q$$

$$\Rightarrow \|\iota(f)\| = \|f\|_p \Rightarrow \|\iota\| = 1 . \qquad \square$$

Teor. $\mathcal{L}^p(\mu)$, $p \in [1, \infty]$ e μ σ-finita é Banach.

Prova. Suponha que $p < \infty$ e que (f_n) é uma sequência de Cauchy.

Daí, existe $m_k \nearrow \infty$ tal que

$$\| f_n - f_{m_k} \| < 2^{-k} \quad \forall \quad n \geq m_k$$

Seja $A \subset X$ mensurável com $m(A) < \infty$. Então, para $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$

$$\int |f_{m_k} - f_{m_{k+1}}| \mathbb{1}_A \, d\mu \leq \frac{1}{2^k} \cdot \| \mathbb{1}_A \|_q = 2^{-k} (m(A))^{1/q}.$$

$$\Rightarrow \quad g_n := \sum_{k=1}^{n} |f_{m_k} - f_{m_{k+1}}| \cdot \mathbb{1}_A \quad \text{define uma}$$

sequência monótona e, pelo Lem de Fatou

$$\int \lim g_n \, d\mu = \lim \int g_n \, d\mu \leq m(A)^{1/q}$$

Como A é arbitrário: $\sum_{k=1}^{\infty} |f_{m_k} - f_{m_{k+1}}|$ existe q.t.p.

$$\Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} f_{m_k} = f \quad \text{existe q.t.p.}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{k \to \infty} |f_{m_k}|^p = |f|^p \quad \text{q.t.p.}$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\Rightarrow} \quad \int |f|^p \, d\mu \leq \liminf \int |f_n|^p \, d\mu < \infty.$$

$$\Rightarrow \quad f \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Basta mostrar que $\| f_n - f \|_p \longrightarrow 0$.

Note que

$$\| f_n - f_{m_k} \|_p \leq \| f_n - f_{m_r} \|_p + \| f_{m_k} - f_{m_r} \|$$
$$\leq 2^{-\min\{r,k\}+1}.$$

$$\Rightarrow \quad |f_n - f_{m_k}|^p \xrightarrow{k \to \infty} |f_n - f|^p \quad \text{q.t.p.}$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\Rightarrow} \quad \int |f_n - f|^p \, d\mu \leq \liminf \int |f_n - f_{m_k}|^p \, d\mu \leq (2^{-r+1})^p$$

onde $n \geq m_r$.

$$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \quad \int |f - f_n|^p \, d\mu \longrightarrow 0$$

$\square$