2024 - 1

Análise Funcional

– conteúdo –

arquimedes.nce.ufrj.br/dm/manuel

Exemplos (TVE)

(1) $C([0,1]) := \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ cont} \}$

(2) $\mathcal{H}(\mathbb{D}) := \{ f : \{|z| \leq 1\} \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa no interior, cont. em } \mathbb{D} \}$

(3) $\ell_p(\mathbb{N}) := \{ (a_i) : \| \sum_i |a_i|^p \|^{1/p} < \infty \}$, $p \geq 1$

---

(4) $\mathcal{M}([0,1]) = \{ \mu : \text{medida com sinal} \}$

(5) $\mathcal{H}(\mathbb{D}_0) := \{ f : \{|z| < 1\} \to \mathbb{C} \mid \text{hol.} \}$

<u>Def.</u> ① Um espaço vetorial X sobre $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ é um <u>e.v.t.</u> (ou TVS em inglês) se X é munido com uma topologia tal que

$$X \times X \to X, \quad (x, y) \mapsto (x + y),$$

$$\mathbb{K} \times X \to X, \quad \lambda, x \mapsto \lambda x$$

são contínuas.

② Uma aplicação $\| \cdot \| : X \to ~~\mathbb{R}_{\geq 0}~~ [0, \infty)$ é uma <u>seminorma</u> se

$$\| x + y \| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \|x\|$$

Uma seminorma é norma se $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(3) $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach se $\|\cdot\|$ é norma e X é completo com a topologia induzida pela métrica $d(x,y) := \|x-y\|$.

Exemplos: (1) $\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$

Fato (Análise 1) (b) se $\|f_n - f\| \to 0$ e $f_n \in C([0,1]) \Rightarrow f$ é contínua. } Banach

(a) $\|\cdot\|$ é norma

(2) Para (f_n) seq. em $\mathcal{H}(\mathbb{D})$:

(a) $\|\cdot\|$ é norma

(b) se (f_n) é Cauchy $\Rightarrow \lim f_n$ existe.

$$\overset{\text{Cauchy}}{\Longrightarrow} \quad f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz$$

$$\Rightarrow \quad \lim f_n \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$$

(3) Veremos para isto em breve.

Espaços de Fréchet

Seja X um espaço vetorial e $(\|\cdot\|_n)$ uma sequência de seminormas. Então, dizemos que $U \subset X$ é aberto se $\forall u \in U \ \exists\, k \geq 0$ e $r > 0$:

$$\{x \in X : \|x-u\|_n < r \ \forall\, n \leq k\} \subset U.$$

[Ou seja, a topologia gerada por conjuntos deste tipo].

Então X é Fréchet se a topologia é Hausdorff e X é completo.

Para tratar o caso de $\mathcal{H}(\mathbb{D}_0)$, basta definir
$$\|f\|_n := \sup\{|f(z)| : |z| \le 1-\tfrac{1}{n}\}.$$

<u>E o caso final:</u>

Pelo teorema de Riesz, $\mathcal{M}([0,1])$ é o espaço dos funcionais contínuos de $C([0,1])$.

Ou seja: $\mathcal{M}([0,1]) = \left(C([0,1])\right)^*$.

A topologia natural em $\mathcal{M}([0,1])$ é

$$\mu_n \to \mu \quad \text{se} \quad \int f\,d\mu_n \to \int f\,d\mu \quad \forall f \in C([0,1])$$

<u>Ou seja</u>: $\mu \longmapsto \int f\,d\mu$ é contínua $\forall f \in C([0,1])$.

Basta definir a topologia em $\mathcal{M}([0,1])$ sendo a topologia mais grossa tal que $\mu \mapsto \int f\,d\mu$ é contínua, a topologia fraca*.

<u>Por quê?</u> Nas aplicações (EDP, teoria ergódica, teoria de prob.), você <u>estuda</u> um operador agindo num espaço de funções e quer construir limites para obter objetos novos/interessantes.

$\Rightarrow$ A top. fraca* é a topologia relevante!

Um passeio para o mundo dos EVTs

<u>Def.</u> 1) Um espaço vetorial X é um EVT se X é um espaço topológico ~~tal~~ que as operações $+, \cdot$ são cont. e $\{x\}$ é fechado, para qualquer $x \in X$

2) Um espaço de Fréchet é um EVT tal que

a) a topologia é gerada por uma métrica que é invariante sob. translação.

b) existe uma base local da topologia ~~tal~~ que cada elemento é convexo. } "locally convex".

<u>Facts</u> X EVT. Então, para qualquer vizinhança de 0,

- $X = \bigcup_{t>0} tU$
- $\{tU : t>0\}$ é base local da topologia

<u>Def.</u> X é completo $\iff$ $\forall$ sequência de <u>Cauchy</u>, o limite pertence a X.

(x_n) Cauchy se $\forall$ ~~V~~ na base da topologia, $\exists M$:

$$x_n - x_m \in V \quad \forall\, n, m \geq M$$

<u>Theorem</u> (Rudin, Th. 1.24)

Seja X ~~espaço de~~ EVT com uma base local <u>enumerável</u>. Então, existe uma métrica d, compatível com a top., que invariante sob translações.

Se a base é loc. convexo $\Rightarrow$ bolas abertos são convexos.

No caso de um espaço de Fréchet como def anteriormente:

$$\left\{ \left\{ x : \|x_k\| < \frac{1}{m} \ \forall k = 1, \ldots n \right\} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

é base loc. convexa da topologia.

<u>Observação</u>: Os teoremas da aplicação aberta, do gráfico fechado ~~funcionam~~ e Banach-Steinhaus valem nesta generalidade.

<u>Capítulo I</u> Espaços normados

<u>Def</u>: 1) Seja X e.v. e $\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$ tal que,

$\forall x, y \in X, \ \lambda \in \mathbb{K}$:

- $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\, x$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Então $\|\cdot\|$ é uma norma.

2) $(X, \|\cdot\|)$ é Banach se X é <u>~~completo~~</u>.

3) Duas normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ são <u>equivalentes</u> se $\exists C > 0$,

$$\frac{1}{C} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1 .$$

<u>Exemplos</u>:

$$\ell_1(\mathbb{N}) := \left\{ (x_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum |x_i| < \infty \right\},$$

com $\|\xi\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$

$$\ell_2(\mathbb{N}) := \left\{ (x_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum |x_i|^2 < \infty \right\}$$

com $\|\xi\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \right)^{1/2}$

Proposição: $\ell_1(\mathbb{N})$, $\ell_2(\mathbb{N})$ são espaços de Banach.

Prova: • $\ell_1(\mathbb{N})$ é Banach (Ex.)

• $\ell_2(\mathbb{N})$ é Banach pois

(a) $\|x\|_2 = 0 \iff \sum |x_i|^2 = 0 \iff x_i = 0 \ \forall i$

(b) $\|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum |\lambda|^2 |x_i|^2} = |\lambda| \, \|x\|_2$

(c) $$\|x+y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 \leq \sum (|x_i| + |y_i|)^2$$
$$= \sum |x_i|^2 + 2\sum |x_i||y_i| + \sum |y_i|^2$$
$$\overset{CS}{\leq} \sum |x_i|^2 + 2\sqrt{\sum |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum |y_i|^2} + \sum |y_i|^2$$
$$= (\|x\| + \|y\|)^2.$$

(d) Suponha que $(x^{(n)})$ é Cauchy. Então, $(x_i^{(n)})$ é Cauchy $\forall i \Rightarrow x_i := \lim_{n\to\infty} x_i^{(n)}$ existe $\forall i \in \mathbb{N}$.

Do outro lado: $x = (x_i) \in \ell_2$ pois $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M:$
$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^2 < \varepsilon^2$$
$\downarrow m \to \infty$
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} |x_i^{(n)} - x_i|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow \|x^{(n)} - x\| < \varepsilon^2 \Rightarrow x \in \ell^2(\mathbb{N})$$
e $\|x^n - x\| \longrightarrow 0$ $\square$

Vamos agora considerar
$$X = \ell_1(\mathbb{N}) \cap \ell_2(\mathbb{N}). \qquad \left(\underline{\text{Obs.}}: \ \ell_2(\mathbb{N}) \supset \ell_1(\mathbb{N}) \right)$$
$$x^{(n)} = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots \right)$$
$$\Rightarrow \frac{\|x^{(n)}\|_2}{\|x^{(n)}\|_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ não são equivalentes.

<u>Teorema</u>: Seja X um e.v. de dimensão finita.

Então, todas as normas em X são equivalentes.

<u>Prova</u>: Seja $\|\cdot\|$ uma norma e, depois de escolher uma base $e_1 - e_n$,

$\| \sum \lambda_i e_i \|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$. Então,

(i) $\| \sum \lambda_i e_i \| \leq \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \cdot \|e_i\| \leq \| \sum \lambda_i e_i \|_1 \cdot \max_i \|e_i\|$

(ii) Agora, suponha que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, existe

v_k tal que $\|v_k\|_1 = 1$ e $\|v_k\| \leq 1/k$.

Pela compacidade da esfera, podemos s.p.d.g supor que

$v = \lim v_k$ existe em relação com $\|\cdot\|_1$. Daí,

$$\|v\| \leq \underbrace{\|v - v_k\|}_{\longrightarrow 0} + \|v_k\| \leq \left(\max \|e_i\|\right) \|v - v_k\|_1 + \frac{1}{k}$$

Ou seja $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow \|v\|_1 = 0$ $\lightning$ $\square$

<u>Corolário</u>: Qualquer subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado.

<u>Exemplos</u>: Para $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, os espaços

$P_n := \{ x \mapsto a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n ; a_0 - a_n \in \mathbb{C} \}$ são fechados,

mas, pelo Stone-Weierstrass,

$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n} = (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ não é fechado

Teorema A bola fechada $\{x : \|x\| \leq 1\}$ num espaço normado X é compacto se e somente se a dimensão de X é finita

Prova. Se $\dim X < \infty$, a afirmação segue do anterior.

Para a volta, precisamos o seguinte lema:

Lema (Riesz): Seja V um subespaço fechado de X. Então, para cada $0 < \alpha < 1$ existe $\xi \in X \setminus V$ tal que $\|\xi\| = 1$, $\inf\{\|\xi - x\| : x \in V\} \geq \alpha$.

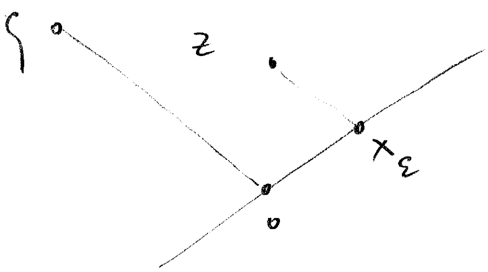
Prova (Lema): Para qualquer $z \in X \setminus V$, $d := \inf\{\|z - x\| : x \in V\} > 0$.

Daí, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe x_ε:

$$d \leq \|x_\varepsilon - z\| \leq d + \varepsilon .$$

Define $\xi := \frac{1}{\|z - x_\varepsilon\|}(z - x_\varepsilon) \in X \setminus V$. Além disso, para $x \in V$:

$$\|\xi - x\| = \frac{1}{\|z - x_\varepsilon\|} \| z - \underbrace{(x_\varepsilon + x\|z - x_\varepsilon\|)}_{\in V} \| \geq \frac{d}{\|z - x_\varepsilon\|} \geq \frac{d}{d+\varepsilon} \quad \square$$



Def $S_r := \{x : \|x\| = r\}$

$B_r(x) :=$

Para a outra direção, bastar aplicar o lema indutivamente: Suponha $x_1 - x_n \in S_1$, $\|x_i - x_j\| > \frac{1}{2}$ $\forall\ 1 \leq i < j \leq n$

$\Rightarrow \mathrm{Span}\{x_1 - x_n\}$ fechado $\Rightarrow \exists\, x_{n+1} \in S_1$: " $\quad n+1$

$\square$

Agora já vimos uns exemplos de espaços normados:

1) $\dim V < \infty$ $\Rightarrow$ todas as normas equivalentes, V completo

2) $C([0,1])$ é normado e completo

3) Os polinômios não são completos.

<u>Daí, um pouco de topologia:</u>

<u>Def.</u> Um espaço métrico (X,d) é <u>completo</u> se qualquer sequência de Cauchy é convergente.

<u>Obs.</u> Para evt uma (x_n) é Cauchy se para qualquer viz. $\mathcal{U}$ de 0 existe N: $x_n - x_m \in \mathcal{U}$.

<u>Lema</u>: Seja (X,d) completo. Então, para $A \subset X$:
A é completo $\Leftrightarrow$ A fechado.

<u>Prova.</u>
(i) Se A é completo: $\forall x \in \bar{A}$ e $n \in \mathbb{N}$: $B_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset$.
$\Rightarrow \exists\ x_n \in B_{1/n}(x) \cap A \Rightarrow (x_n)$ Cauchy e $\lim x_n = x \in A$.
(ii) Se A é fechado e (x_n) é Cauchy, $\overset{X \text{ compl.}}{\Longrightarrow}$ $x = \lim x_n$ existe.
Além disso, pelo limite, $\overset{x_n \in A}{\text{qualquer}}$ vizinhança de x contém elementos de A $\overset{\text{fech}}{\Longrightarrow}$ $x \in A$ □

<u>Teorema</u>: Seja (X,d) métrico. Então, existe $(\hat{X},\hat{d})$ espaço métrico e $i:(X,d) \to (\hat{X},\hat{d})$ <u>isometria</u> tal que $\overline{i(X)} = \hat{X}$.
Além disso, para qualquer outro espaço (X', d') com esta propriedade, existe uma isometria bijetiva
$\hat{X} \to X'$.

Prova (Esboço):

(a) Define $\hat{X} := \{ (x_n) : (x_n) \text{ seq. de Cauchy} \} / \sim$

and $(x_n) \sim (y_n) \iff \lim (x_n - y_n) = 0$.

$$\hat{d}((x_n),(y_n)) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Deste prova que $\hat{d}$ é bem-def. (em seja, se $(x_n) \sim (\tilde{x}_n)$ e $(y_n) \sim (\tilde{y}_n)$, então $\hat{d}((x_n),(y_n)) = \hat{d}((\tilde{x}_n),(\tilde{y}_n))$), que $\hat{d}$ é métrica, que $(\hat{X}, \hat{d})$ é completo, e que $i : x \mapsto (x, x, \dots)$ é isometria.

(b) Unicidade.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i"'] \arrow[dr, "j"] & \\ \hat{X} & & X^* \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow j \circ i^{-1} : i(\hat{x}) \longrightarrow j(x)$ é isometria bijetora.

$\Rightarrow$ Para qualquer $\hat{x} \in \hat{X}$ ex. (x_n) com $x_n \to \hat{x}$.

$\Rightarrow \left(j \circ i^{-1}(x_n) \right)$ é seq. de ~~Cauy~~ Cauchy em X^*

Define $h(\hat{x}) = \lim_{n\to\infty} j \circ i^{-1}(x_n)$. --

$\square$

Espaços de aplicações métricas

Def. $T : (X, d_X) \longrightarrow (Y, d_Y)$ é contínuo se -- ε / δ.

No caso especial de espaços normados e aplicações lineares, temos o teorema seguinte.

Teorema: Seja $T: X \to Y$ aplicação linear entre espaços normados. Então, são equivalentes:

(1) T é "limitada": $\|T\| := \sup_{\xi \neq 0} \frac{\|T\xi\|}{\|\xi\|} < \infty$

(2) T é uniformemente contínua

(3) T é contínua

(4) T é contínua em 0.

Prova (1) implica que $\|Tx - Ty\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\|$
$\Rightarrow$ 2, 3, 4.

Suponha que T é contínua em 0. Então, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\|x\| \leq \delta$ implique que $\|Tx - T0\| = \|Tx\| \leq 1$. Daí,

$$\forall x: \quad \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \frac{1}{\delta}.$$
$\square$

Uma topologia nos espaços de aplicações

Neste subcapítulo: (X, d) é um espaço métrico tal que d satisfaz todas as propriedades, mas $d: X \times X \to [0, \infty]$.
Neste caso, chamaremos d uma "métrica*".

Obs: d métrica* $\Rightarrow$ $d_0(x,y) := \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$ é métrica.

Def. Sejam E, X conjuntos. Então, $F(E,X)$ é

$$F(E,X) := \{T: E \to X\}$$

Se (X,d) é métrico, então, para $f, g \in F(E,X)$,

$$d(f,g) := \sup_{x \in E} d(f(x), g(x))$$

Teorema: $F(E,X)$ completo $\Leftrightarrow$ X completo.

Prova Considere $\iota : X \longrightarrow F(E,X)$, $\quad x \longmapsto \{ e \mapsto x \ \ \forall e \in E \}$.

Vamos mostrar que $i(X)$ é fechado (isso é trivial).

Em particular, se uma sequência (f_n) em $\iota(X)$ converge para f, então, se $f_n(X) = \{x_n\}$, e $f(X) = \{x\}$ $\Rightarrow$ $x_n \longrightarrow x$. (Note que $f \in \iota(X)$). Então, $F(E,X)$ completo $\Rightarrow X$ compl.

Do outro lado, se X é completo e (f_n) é Cauchy

$\Rightarrow (f_n(x))$ é Cauchy $\forall x \Rightarrow f(x) := \lim f_n(x)$ existe $\forall x \in X$ □

Def Seja E, X espaços ~~métricos~~ topológicos. Então

$$C(E,X) := \{ f : E \longrightarrow X \mid f \text{ cont.} \}.$$

Teorema: Seja X métrico. Então, $C(E,X)$ é fechado em $F(E,X)$.

Prova:
$$C(E,X) = \bigcap_{x \in E} \underbrace{\{ f \in F(E,X) \mid f \text{ cont. em } x \}}_{C_x(E,X)}$$

Daí, basta mostrar que $C_x(E,X)$ é fechado.

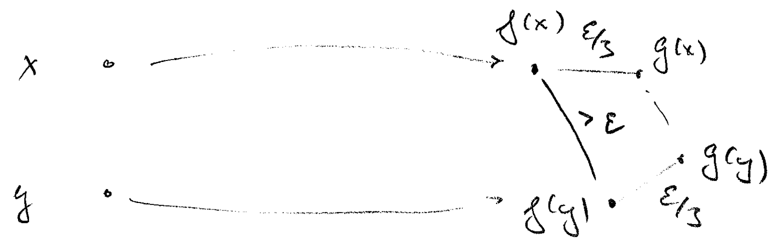
Porém, suponha que $f \in F(E,X) \setminus C_x(E,X)$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tal que para cada vizinhança U de x,

$f(U) \not\subset \{ y : d(x,y) < \varepsilon \}$.

$\Rightarrow \exists\, y \in U : d(f(x), f(y)) > \varepsilon$.

Para g com $d(f,g) < \varepsilon/3$:



$\Rightarrow d(g(x), g(y)) > \varepsilon/3$. Como U é arbitrário: $g \notin C_x(E,X)$ □

O teorema de Baire

Fundamental para várias provas na análise funcional

Seja X um espaço topológico. Então $A \subset X$ é **denso** se $\bar{A} = X$. Um conjunto $A \subset X$ chama-se **raro** (nowhere dense) se $\bar{A}$ não contém um aberto.

Fatos:

A denso $\iff$ $A \cap U \neq \emptyset$ $\forall$ U aberto

A raro $\iff$ $\bar{A}^c \cap U \neq \emptyset$ $\forall$ U aberto

Prova: $\bar{A} = \{ x \in X :$ Qualquer vizinhança de x tem interseção com $A \}$

$= \{ x \in X \mid \forall U \in J_x ; \; U \cap A \neq \emptyset \}$,

onde $J_x := \{ U \text{ aberto} \mid x \in U \}$

$(\bar{A})^c = \{ x \in X \mid \exists U \in J_x : U \cap A = \emptyset \}$.

Basta usar estas definições $\square$

Lema: Seja (X,d) completo e $(x_n) \subset X$, $(r_n) \subset (0,\infty)$ tal que $\overline{B_{r_{n+1}}(x_{n+1})} \subset \overline{B_{r_n}(x_n)}$ $\forall n$ e $r_n \to 0$.

Então $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_{r_n}(x_n)} = \{ \lim x_n \} \neq \emptyset$.

Prova. Por construção, (x_n) é Cauchy. Além disso,

para qualquer n, $x_m \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$ $\forall$ $m \geq n$

$\overset{\text{fechado}}{\Longrightarrow}$ $\lim_{m \to \infty} x_m \in \overline{B_{r_n}(x_n)}$

$\Longrightarrow$ $x \in \bigcap \overline{B_{r_n}(x_n)}$ $\square$

Tarefa (Baire): Seja (X,d) completo e (A_n) uma sequência de conjuntos fechados.

(1) Se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ contém um aberto, então $\exists\, m$: A_m contém um aberto.

(2) Se os A_n são raros, então $\bigcup A_n$ não contém um aberto

Prova. Obviamente $1 \Leftrightarrow 2$. Vamos provar (1):

Seja $\mathcal{U} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ aberto, e suponha que $\mathrm{Int}(A_n)=\emptyset\ \forall n$.
Pela hipótese, $\mathcal{U} \cap A_1^c \neq \emptyset$ e aberto

$\Rightarrow \exists\, (x_1, r_1)$: $\overline{B(x_1,r_1)} \subset \mathcal{U} \cap A_1^c$

Por indução obtém se uma sequência $((x_n, r_n))$ com $r_n \searrow 0$ tal que $\overline{B_{r_n}(x_n)} \subset B_{r_{n-1}}(x_{n-1}) \cap A_{n-1}^c$

$\overset{\text{Lema}}{\Longrightarrow}$ $\lim x_n = x$ ~~ex~~ existe.

Do outro lado, $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B_{r_n}(x_n)} \subset \mathcal{U} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c = \mathcal{U} \cap \left(\bigcup_n A_n\right)^c = \emptyset$

□

Definições ao saber

(1) $A \subset X$ é magro (meager) se A está contido uma união enumerável de conjuntos raros.

(2) magro = de 1ª categoria

(3) não-magro = de 2ª categoria

(4) Um espaço topológico chama-se Baire se (1) vale.

Uma 1a aplicação:

Teorema. Seja (X,d) completo, $F \subset C(X,\mathbb{R})$ tal que, para qualquer $x \in X$, $K_x := \sup\{f(x) : f \in F\} < \infty$.
Então, existe um aberto $\mathcal{U}$ e $C > 0$ tal que

$$f(x) \leq C \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Prova: Define

$$\begin{aligned} A_n &:= \{x \in X : f(x) \leq n \quad \forall f \in F\} \\ &= \{x \in X : K_x \leq n\} \\ &= \bigcap_{f \in F} \{x \in X : f(x) \leq n\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_n$ fechado e $\bigcup A_n = X$.
$\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{U}$ aberto com $\mathcal{U} \subset A_n$. $\square$

Outros pontos:

Um conjunto chama-se G_δ se é interseção enumerável de abertos. Um conjunto genérico / residual é um G_δ denso.

Observações: A genérico $\Leftrightarrow$ A um G_δ denso
$\Rightarrow A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$, os $\mathcal{U}_i$ abertos e densos

No caso de um espaço de Baire:
A genérico $\Leftrightarrow$ $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i$ para $\mathcal{U}_i$ aberto e denso.

Prova. $\mathcal{U}_i$ abertos e densos $\Rightarrow (\mathcal{U}_i)^c$ raro e fechado
$\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathcal{U}_i)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{U}_i\right)^c = A^c$ não contém um aberto $\Rightarrow A$ denso $\square$

Construção de espaços normados

O Espaço Quociente:

① Seja $(X, \|\cdot\|)$ normado e $N \subset X$ um subespaço. Define

$x \sim y \iff x - y \in N$.

② $X/N = X_\sim := \{ x + N : x \in X \}$ com as operações

$$(x+N) + \lambda(y+N) = x + \lambda y + N, \quad \forall\, x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}.$$

Como $N + N = N$ e $\lambda N = N$, a operação é bem definida

③ Define, para $\hat{x} := x + N$:

$$\|\hat{x}\|_\sim := \inf \{ \|x + n\| : n \in N \}$$

Teorema: Se N é fechado, então:

① $(X/N, \|\cdot\|_\sim)$ é normado. X Banach $\Rightarrow$ X/N Banach

② $\pi : X \to X/N$ é contínua, $\|\pi\| \leq 1$, π é uma aplicação aberta.

Provas

- Obviamente, $\|\cdot\|_\sim \geq 0$. Se $\|\hat{x}\|_\sim = 0$, então existe (n_k) em N com $x - n_k \to 0 \xRightarrow{N \text{ fechado}} x \in N$ e $\hat{x} = \hat{0}$.

  As outras propriedades da norma são imediatas, p. ex.

$$\|\hat{x} + \hat{y}\|_\sim = \inf_{n \in N} \|x + y + n\| = \inf_{n, m \in N} \|x + y + n + m\|$$
$$\leq \inf \|x + n\| + \inf \|y + n\|.$$

$\Rightarrow (X/N, \|\ \|_\sim)$ normado.

- Obviamente $\|\pi\| \leq 1 \Rightarrow$ contínua.

• Agora suponha que $\mathcal{U} \subset X$ é aberto. Para $x \in X$, $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset \mathcal{U}$, vamos mostrar que $B_\varepsilon(\hat{x}) \subset \Pi(\mathcal{U})$:

$$\hat{y} \in B_\varepsilon(\hat{x}) \Rightarrow \inf_{n \in N} \|x - y + n\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists n : \|x - y + n\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow -n + y \in B_\varepsilon(x),$$

Mas $\Pi(-n+y) = \hat{y} \Rightarrow \Pi(B_\varepsilon(x)) \supset B_\varepsilon(\hat{x})$.

• Basta mostrar que X/N é Banach se X é Banach:

Suponha que $(\tilde{x}_n)$ é Cauchy. Pela construção de $\|\cdot\|_\sim$, dado x_n com $\Pi(x_n) = \tilde{x}_n$, pode-se escolher $x_{n+1} \in \Pi^{-1}(\tilde{x}_{n+1})$ tal que $\|x_n - x_{n+1}\| < 2\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\|$.

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \sum_{e=n}^{m-1} \|x_e - x_{e+1}\| \leq 2 \sum_{e=n}^{m-1} \|\tilde{x}_e - x_{e+1}\|$$

Daí, se $\sum \|\tilde{x}_e - \tilde{x}_{e+1}\| < \infty$, (x_n) é Cauchy etc.

Porém, se $\sum \|\tilde{x}_e - \tilde{x}_{e+1}\| = \infty$, existe para qualquer subsequência de $(\tilde{x}_n)$ uma sub-subsequência tal que a soma é ~~diverge~~ convergente

$\Rightarrow$ o limite da sub-subseq. existe

Como a primeira subsequência pode ser escolhida arbitrariamente: $\lim x_n \in X/N$

O teorema de Hahn-Banach

Def. Seja X um e.v. e $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Então, $p : X \to \mathbb{R}$ é ~~sub~~sublinear se

- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall \lambda \geq 0$
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

Exemplos: 1) normas e seminormas.

2) o funcional de Minkowski: Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança de 0 em um espaço vetorial topológico e suponha que $\mathcal{U}$ é convexo. Define

$$p(v) := \sup\{\lambda \geq 0 : \lambda v \in \mathcal{U}\}$$

De fato: $\mathcal{U}$ ~~vizinhança~~ convexo $\iff$ $\mathcal{U} = \{v : p(v) < 1\}$ para um func sublinear p e $x \in X$.

Além disso, se $p, \tilde{p}$ são sublineares, observamos que

$$p \leq \tilde{p} \iff p(x) \leq \tilde{p}(x) \quad \forall x \in X.$$

Lema: Seja I um conjunto de funcionais sublineares que é totalmente ordenado: para $p, \tilde{p} \in I$, ou, $p \leq \tilde{p}$ ou $\tilde{p} \leq p$.
Então, existe um funcional sublinear p tal que $p \leq q \;\forall q \in I$.

Prova: Define $p(x) := \inf\{q(x) : q \in I\}$. Vamos mostrar que p é sublinear: é fácil ver que, para $X = \mathbb{R}$, um funcional é da forma $q_{a,b}(x) = \begin{cases} ax & : x \geq 0 \\ bx & : x < 0 \end{cases}$, com $a \geq b$.

Daí $q_{a,b} \geq q_{\alpha,\beta}$ se $a \geq \alpha \geq \beta \geq b$.

$\Rightarrow p(x) > -\infty, \quad \forall x \in X$

Basta provar que p é sublinear, que é fácil. $\square$

<u>Lema</u>: Seja p um funcional sublinear minimal. Então p é linear.

<u>Prova</u>. I Seja $a \in X$, e define

$$p_a(x) := \inf_{t \geq 0} p(x+ta) - p(ta) \leq p(x)$$

Do outro lado, como $p(z-y) \geq p(z) - p(y)$:

$$p(x+ta) - p(ta) = p(-(-x)+ta) - p(ta) \geq p(ta) - p(ta) - p(-x)$$
$$= -p(-x).$$

$$\Rightarrow \quad -p(-x) \leq p_a(x) \leq p(x).$$

II Vamos mostrar que p_a é sublinear: Para $\lambda > 0$

$$p_a(\lambda x) = \inf_t p(\lambda(x+\tfrac{t}{\lambda}a)) - tp(\lambda a) = \lambda \inf_t p(x+\tfrac{t}{\lambda}a) - \tfrac{t}{\lambda}p(a).$$

$$= \lambda p_a(x)$$

Seja $\varepsilon > 0$ e $x_1, x_2 \in X$. Daí, existe t_1, t_2: $p_a(x_i) \geq p(x_i + t_i a) - t_i p(a) - \varepsilon$

$$\Rightarrow p_a(x_1) + p_a(x_2) \geq p(x_1 + t_1 a) + p(x_2 + t_2 a)$$
$$- (t_1 + t_2)p(a) - 2\varepsilon$$
$$\geq p(x_1 + x_2 + (t_1+t_2)a) - (t_1+t_2)p(a) - 2\varepsilon$$
$$\geq p_a(x_1+x_2) - 2\varepsilon$$

III Como p é minimal, $p_a = p \quad \forall a \in X$

$$\Rightarrow p(x) = p_a(x) \leq p(x+a) - p(a)$$

$$\Rightarrow p(x) + p(a) \leq p(x+a) \leq p(x) + p(a) \quad \square$$

Teorema (Hahn-Banach abstrato)

Seja X esp. vet., $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e p sublinear. Então, existe f linear com $f \le p$.

Prova. Lema 1 e 2 + Lema de Zorn.

Teorema (Hahn-Banach clássico, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$)

Seja X esp. vet., $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ e p sublinear. Então, se $f: L \to \mathbb{R}$ é linear, onde $L \subset X$ é um subespaço e $f \le p|_L$ então existe $\bar{f}$ linear com $\bar{f} \le p$ e $\bar{f}|_L = f$.

Prova. Define $\tilde{p}(x) := \inf_{y \in L} p(x-y) + f(y) \le p(x)$

Além disso,

$$p(x-y) - f(y) \ge -p(-x) + p(-y) - f(-y) \ge -p(-x)$$

$\Rightarrow \tilde{p}$ existe. Pelos menos argumentos da prova anterior, $\tilde{p}$ é sublinear $\Rightarrow$ HB abstrato. $\square$

Teorema (Hahn-Banach clássico, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$)

Seja X esp. vetorial e p uma seminorma. Então, para $f: L \to \mathbb{K}$ linear com $|f| \le p$ (L subespaço vet.), existe $\bar{f}: X \to \mathbb{K}$ linear com $|\bar{f}| \le p$ e $\bar{f}|_L = f$.

Prova. O caso $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ segue do Teorema de HB, caso real: p é sublinear $\Rightarrow \exists\, \overset{*}{f}$ linear com $\overset{*}{f}|_L = f$ e $\overset{*}{f} \le p$. Porém,

$$-\overset{*}{f}(x) = \overset{*}{f}(-x) \le p(-x) = p(x)$$

$\Rightarrow |\overset{*}{f}| \le p$.

Se $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, define $f_1 := \mathrm{Re}(f)$. Então, existe uma extensão $\bar{f}_1$ que é $\mathbb{R}$-linear.

Seja $\overset{*}{f}(x) := \overset{*}{f}_1(x) - i\overset{*}{f}_1(ix)$.

this page is left unintentionally blank.

① Daí, $\mathrm{Re}(f^*) = f_1^*$. Além disso, para $x \in L$:

$$f^*(x) = \mathrm{Re}(f(x)) - i\,\mathrm{Re}(f(ix))$$
$$= \mathrm{Re}(f(x)) - i\,\mathrm{Re}(i f(x)) = \mathrm{Re}(f)(x) + i\,\mathrm{Im}(f)(x) = f(x).$$

② $$|f^*(x)| = \underbrace{\frac{\overline{f^*(x)}}{|f^*(x)|}}_{=:\alpha} f^*(x) = \alpha f^*(x) = f^*(\alpha x)$$
$$= \mathrm{Re}(f^*(\alpha x)) = f_1^*(\alpha x) \le p(\alpha x) \overset{|\alpha|=1}{=} p(x)$$

③ Além disso, f^* é linear □

Existência de funcionais lineares contínuos

Corolário I: Seja $(X, \|\cdot\|)$ normado e $f: L \to \mathbb{K}$ contínua, linear, $L \subset X$ subespaço. Então $\exists\, f^*: X \to \mathbb{K}$ linear com $\|f^*\| = \|f\|$, e $f^*|_L = f$.

Corolário II: Seja X e.v. e $(\|\cdot\|_n)$ uma sequência de seminormas tal que a topologia induzida é Fréchet. Então, para $f: L \to \mathbb{K}$ contínua $\exists\, f^*$ cont. —

Separação de conjuntos convexos

9/4/24

Def: $M \subset X$ é convexo se $\forall\, x, y \in M$, $t \in [0,1]$:

$$tx + (1-t)y \in X.$$

Fato: M convexo $\Rightarrow$ $\overline{M}$ convexo.

Exemplos: $M = \{x\}$, $M = \{x : p(x) \le 1\}$, onde p é sublinear
$M = \{x : \|x\| \le 1\}$, $\|\cdot\|$ seminorma

Proposição: Se X espaço vetorial real e $M \subset X$ convexo, $M \neq \emptyset$. Seja p sublinear. Então, existe $f : X \to \mathbb{R}$ linear tal que $f \leq p$ e

$$\inf_{x \in M} p(x) = \inf_{x \in M} f(x)$$

Prova. Suponha que $I := \inf_{x \in M} p(x) > -\infty$.

Define

$$\tilde{p}(x) := \inf \{ p(x + ty) - tI : t \geq 0, y \in M \}$$

Como anteriormente:

$$-p(-x) \leq \tilde{p}(x) \leq p(x)$$

e $\tilde{p}(x)$ é sublinear (exercício)

$\Rightarrow \exists f$ linear com $f \leq \tilde{p}$.

Para $x \in M$:

$$f(-x) \leq \tilde{p}(-x) \leq p(-x+x) - I = -I$$

$\Rightarrow f(x) \geq I$.

Daí, para $x \in M$: $\quad I \leq f(x) \leq p(x)$ $\square$

Corolário: Suponha que A, B são convexos tal que $d(A, B) = \inf \{ \|a - b\| : a \in A, b \in B \} > 0$

Então, existe $f : X \to \mathbb{R}$ linear e contínua tal que

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset$$

Prova: $A - B := \{ a - b : a \in A, b \in B \}$ é convexo. Então existe f com $\|f\| \leq \infty$ tal que

$$0 < d(A, B) = \inf_{x \in A - B} f(x) = \inf_{a \in A} f(a) - \sup_{b \in B} f(b)$$ $\square$

O espaço normado $L(X,Y)$

Sejam X, Y espaços normados, e

$$L(X,Y) := \{ f: X \to Y \text{ linear} \mid \underbrace{\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}}_{=: \|f\|} < \infty \}$$
$$= \{ f: X \to Y \text{ linear e contínua} \}$$

<u>Proposição</u>: $(L(X,Y), \|\cdot\|)$ é um espaço normado. Se Y é completo, então $L(X,Y)$ é completo.

<u>Prova</u>: Mostrar que $L(X,Y)$ é normado, é fácil (ex.).

Agora, suponha que Y é completo. Para uma sequência de Cauchy (f_n) em $L(X,Y)$, obtém-se que, $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$$

para qualquer $n, m \geq N$. Daí, como Y é completo, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$ existe para qualquer $x \in X$.

Note que f é linear. Além disso, tomando o limite $m \to \infty$,

$$\|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Ou seja, $f_n(x) \to f(x)$ em norma $\forall\, x \in X$. Além disso, pela condição de Cauchy, $\|f_n - f_m\|$ é limitado. Daí, $\|f_n - f\|$ é limitado $\Rightarrow \|f\| < \infty$ (ou seja, $f \in L(X,Y)$).

<u>Observação</u>: (1) Seja $T \in L(X,Y)$, $S \in L(Y,Z)$, X, Y, Z normados. Então $\|S \circ T\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.

(2) Se X é Banach, então $(L(X,X), +, \circ)$ é uma álgebra de Banach.

O espaço dual de um espaço normado

Definição: Seja X normado. Então

$$X^* := \{ f : X \to \mathbb{K} \mid f \text{ contínua} \}$$

é o espaço dual de X.

Pelo anterior: Define $\|f\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$. Então, $(X^*, \|\cdot\|)$ é Banach.

Corolário do teorema de Hahn-Banach

Seja X normado. Então, para $x \neq y \in X$ existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$. $\square$

Prova: $\{x\}, \{y\}$ são conjuntos convexos.

~~Aplicações do corolário~~

O dual de $T \in L(X,Y)$

Suponha que X, Y são normados e que $T \in L(X,Y)$. Então,

$$T^* : Y^* \to X^*, \quad f \mapsto f \circ T$$

é bem definido e chama-se operador adjunto de T.

Exemplo. ① Se $\dim X < \infty$, então $X^* \cong \mathbb{K}^{\dim X}$:

Escolhe uma base $\{b_i\}$ de X. Para $f \in X^*$ e $x = \sum \lambda_i b_i$,

$$f(\sum \lambda_i b_i) = \sum_{i=1}^{\dim X} \lambda_i f(b_i)$$

Ou seja, existe uma aplicação $X^* \to \mathbb{K}^{\dim X}$. De facto, é fácil ver que a aplicação é um isomorfismo.

② Pelo teorema de Riesz, para Σ localmente compacto

$$(C_c(\Sigma))^* = (\{ f : \Sigma \to \mathbb{K} \mid f \text{ contínua}, \operatorname{supp} f \text{ compacto} \})^*$$

$$= \{ \text{medidas de Borel regulares complexas} \}$$

"Representação de Riesz-Markov-Kakutani"

③ Se X é um espaço de Hilbert, i.e., existe uma aplicação

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K} \quad \text{tal que}$$

① $x \mapsto \langle x, y\rangle$ é linear $\forall\, y \in X$

② $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $\forall\, x, y \in X$

③ $\langle x, x\rangle \geq 0$ $\forall\, x \in X$ e $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$.

Então, é fácil ver que $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ é uma norma.

Def: Se $(X, \|\cdot\|)$ é completo, então $(X, \langle , \rangle)$ chama-se espaço de Hilbert.

Teorema (Representação de Riesz). Se X é Hilbert, então

$$X^* = \{ x \mapsto \langle x, y\rangle \mid y \in X \}.$$

O bidual de um espaço normado.

Seja X normado. Então

$$\iota : X \longrightarrow \{\varphi : X^* \to \mathbb{K}\}, \; x \longmapsto (f \longmapsto f(x))$$

satisfaz ($x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in X^*$)

① $\iota(x + \lambda y)(f) = f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) = \iota(x)(f) + \lambda \iota(y)(f)$

② $|\iota(x)(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$. $\Longrightarrow \|\iota(x)\| \leq \|x\|$

Ou seja: $\iota : X \longrightarrow X^{**}$.

Proposição: ι é uma isometria

Prova. Por Hahn-Banach, para $x \in X$, existe $f \in X^*$ tal que $|f(x)| = \|x\|$: define $f_0 : \mathbb{K}x \to \mathbb{K}$, $\lambda x \mapsto \lambda \cdot \|x\|$. Então pelo teorema de H.B., existe $f \in X^*$ tal que $f|_{\mathbb{K}x} = f_0$, $\|f\| = \|f_0\| = 1$.

$$\Longrightarrow |\iota(x)(f)| = |f(x)| = \|x\| = \|f\|\,\|x\|$$

$$\Longrightarrow \|\iota(x)\| = \|x\| \qquad \square$$

Proposição Seja $T \in L(X, Y)$, X, Y normados. Então,

① $T^{**} \circ \iota = \iota \circ T$

② $\|T\| = \|T^*\|$

Prova: ① é óbvio.

② Para $g \in Y^*$, $x \in X$: $|T^*g(x)| = |gT(x)| \leq \|g\| \cdot \|T\| \, \|x\|$

$\Rightarrow \|T^*g\| \leq \|g\| \cdot \|T\|$ e $\|T^*\| \leq \|T\|$.

$\Rightarrow \|T^{**}\| \leq \|T^*\| \leq \|T\|$

Porém, por ① e a Proposição:

$$\|T^{**}\| \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|T^{**} \circ L(x)\|}{\|Lx\|} = \sup_{x} \frac{\|L \circ T(x)\|}{\|x\|}$$

$$= \sup_{x} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \|T\|. \qquad \square$$

Convenção: Se $X = X^{**}$, X chama-se reflexivo.

Exemplos
- Um espaço de Hilbert é reflexivo
- $\dim X < \infty \Rightarrow$ reflexivo.
- $\ell^p = \{(x_i) : (\sum |x_i|^p)^{1/p} < \infty\}$ para $p > 1$.
- ℓ^1 não é reflexivo.
- $C([0,1])$ não é reflexivo.

O caso ℓ^1

$\ell^1 = \{(x_i) : x_i \in \mathbb{R}, \ \sum |x_i| < \infty\}$.

Define $e_i := (0, \ldots, 1, 0 \ldots) \in \ell^1$.

Para $f \in (\ell^1)^*$, $|f(e_i)| \leq \|f\| \|e_i\| = \|f\|$.

$\Rightarrow f(\sum \lambda_i e_i) = \sum \lambda_i f(e_i)$ pois $\sum |\lambda_i| < \infty$.

Daí, $(\ell^1)^* \longrightarrow \ell^\infty$ é bem definido

De fato, como qualquer elemento em ℓ^∞ define um elemento em $(\ell^1)^*$, $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$.

Vamos agora determinar $(\ell^1)^{**} = (\ell^\infty)^*$:

Seja $f \in (\ell^\infty)^*$ e $a_i := f(e_i)$. Então

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| = \sum_{i=1}^{n} \text{sign}(a_i) f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \text{sign}(a_i) e_i\right) \leq \|f\|$$

$\Rightarrow (a_i) \in \ell^1$.

Ou seja, construimos uma aplicação $\pi : (\ell^\infty)^* \longrightarrow \ell^1$. De facto, $\pi \circ \iota = id$.

Porém: Se $x_n \to 0$, então $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \longrightarrow \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i = x$

$$f(x) - \iota_a(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) = 0$$

Ou seja, podemos escrever

$$f = \pi(f) + g,$$

onde $g \in \{ g \in (\ell^\infty)^* : \ker(g) \subset \{(x_n) : x_n \to 0\} \}$.

Exemplo neste espaço: Seja

$$C := \{ (x_n) : \lim x_n \text{ existe} \}, \text{ e}$$

$$g((x_n)) := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n \qquad (\text{"Césaro limit"})$$

Então, $C \subset \ell^\infty$ subespaço, e $\|g\| \leq 1$.

$\Rightarrow$ existe uma extensão de HB a $(\ell^\infty)^*$.