Universidade Federal do Rio de Janeiro

Análise Funcional (doutorado), 2024-1
Manuel Stadlbauer

2 Operadores limitados

Questão 2.1. Para quais valores $\lambda \in \mathbb{C}$ o operador $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ é invertível, onde T é o operador de shift definido por

$$T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots).$$

Questão 2.2. Para quais valores $\lambda \in \mathbb{C}$ o operador $(S - \lambda\,\mathrm{id})$ é invertível, onde S é definido por

$$S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Questão 2.3. Sejam $S : X \to Y$ e $T : Y \to Z$ operadores lineares limitados. Prove que $\|TS\| \leq \|S\|\|T\|$ e que a desigualdade é estrita.

Questão 2.4. Mostre que os espaço $C^\infty([0,1])$ não admite uma norma $\|\cdot\|$ tal que

$$D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1]), f \to f'$$

é limitada.

Questão 2.5 (**Teorema do ponto fixo de Banach**)**.** Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $A : X \to X$ uma aplicação tais que

$$\sup_{x,y \in X, x \neq y} d(Ax, Ay)/d(x, y) < 1.$$

Mostre que existe um único $x \in X$ com $Ax = x$.

Questão 2.6 (**O operador exponential**)**.** Seja X um espaço de Banach e $T : X \to X$ um operador limitado. Mostre que, para $t \in \mathbb{K}$, a aplicação

$$e^{tT} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} T^n$$

é um operador limitado.

3 O espaço dual

Questão 3.1. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita. Mostre que existe $p : X \to \mathbb{K}$ linear e ilimitado.

Questão 3.2. Seja X um espaço de Banach e $p : X \to \mathbb{K}$ linear e ilimitado. Mostre que $p^{-1}(\{\alpha\})$ é denso para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$.

Questão 3.3 (Banach limit)**.** Seja $X = \ell^\infty(\mathbb{N})$, $C := \{(x_n) \in X : (x_n) \text{ Cauchy}\}$ e

$$\varphi : X \to \mathbb{R}, (x_n) \mapsto \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Mostre que φ é sublinear e que existe $\psi \in X^*$ tal que

a) $x_n \geq 0$ para qualquer n implica que $\psi((x_n)) \geq 0$,
b) $\psi((x_1, x_2 \ldots)) = \psi((x_2, x_3 \ldots))$,
c) $\psi((x_n)) = \lim x_n$ para qualquer $(x_n) \in C$.

4 Aplicações do Teorema de Baire

Questão 4.1. Mostre que $\{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ cont.}, f'(x) \text{ não existe } \forall x \in [0,1]\}$ é genérico em $C([0,1])$.

Questão 4.2. Seja $X = \ell^p(\mathbb{N}) = \{(x_n) : \sum |x_n|^p < \infty\}$, e $S : X \to X$, $(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_2, \ldots)$. Determine $\lim_{n\to\infty} S^n$ e $\lim_{n\to\infty} \|S^n\|$.