**Universidade Federal do Rio de Janeiro**
Análise Funcional (doutorado), 2024-1
Manuel Stadlbauer

# 1 Topologia

**Questão 1.1.** Seja $c$ o conjunto das sequências em $\mathbb{K}$ cujos limites $\lim_n x_n$ existem e $c_0$ o subconjunto com limites igual a 0. Mostre que $c$ e $c_0$ são subespaços fechados do espaço

$$\ell_\infty(\mathbb{N}) := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \|(x_n)\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty\}$$

e que $c/c_0$ e $\mathbb{R}$ são isométricos.

**Questão 1.2.** a) Dê um exemplo de um espaço normado $X$ e um subespaço $Y \neq X$ tais que os espaços são isométricos.

b) Mostre que isso não é possível em dimensão finita.

**Questão 1.3.** Prove que em um espaço normado de dimensão infinita, a bola aberta unitária contém uma família infnita de bolas abertas de raio $1/4$, duas a duas disjuntas.