Universidade Federal do Rio de Janeiro
Análise Real / Cálculo Avançado I (MAA740), 2025-1
Manuel Stadlbauer

1 Topologia dos Espaços Métricos

1.1 Compacidade

Questão 1.1. Seja (X,d) um espaço métrico e $K \subset X$ sequencialmente compacto. Mostre que K é fechado.

Questão 1.2. Seja X um conjunto e seja $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(X)$. Defina a topologia mínima contendo $\mathscr{G}$ e mostre que essa topologia sempre existe.

Questão 1.3. Sejam (X,d) e $(Y,\overline{d})$ espaços métricos, $f : X \to Y$ contínua e (X,d) sequencialmente compacto. Mostre que f é uniformemente contínua.
Observação. Uma aplicação $f : (X,d) \to (Y,\overline{d})$ é uniformemente contínua se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$ para qualquer $x \in X$.

Questão 1.4. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua, com $n \geq 2$. Além disso, suponha que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que o conjunto de nível

$$f^{-1}(\{c\}) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$$

é limitado.

a) Prove que um dos conjuntos

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geq c\} \quad \text{ou} \quad \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq c\}$$

é limitado.

b) Prove que f assume um valor máximo ou mínimo em $\mathbb{R}^n$.

Questão 1.5. Um espaço métrico (X,d) é *totalmente limitado* se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ e $x_1,\ldots,x_n \in X$ tal que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(x_i).$$

Mostre que

a) Se X é compacto, então X é totalmente limitado e completo.
b) Se X é totalmente limitado e completo, então X é compacto.

Dica. Aplique a equivalência entre compacidade e compacidade sequencial em espaços métricos. E na parte (b), o principio dos pombos.