Nome: **A2**
Identificação: **N2**
Polo: **T-AVULSO**

PROVA EXTRAMUROS
MESTRADO 11.11.2023

QUESTÕES

Questão 1 [q1]. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha que f seja monótona em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$ e considere as seguintes condições:

(I) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(II) $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(III) $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|\ln|x|}$ para $x \geq 10$.

(IV) $\sum_{n=1}^{\infty} (|f(n)| + |f(-n)|)$ é convergente.

Quais, dentre as condições (I) a (IV), garantem que a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

seja convergente?

A Somente (II).
B Somente (III).
■ Somente (IV).
D Somente (I) e (III).
E Somente (III) e (IV).

Questão 2 [q2]. Quanto à convergência das séries

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^{n+1} + \cos\left(\pi n + \frac{1}{n}\right) \right) ,$$

$$\text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{\sqrt{n}} , \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}} ,$$

é correto afirmar que:

■ Somente (c) não converge.
B Somente (b) converge.
C Somente (c) converge.
D Somente (a) não converge.
E Somente (b) não converge.

Questão 3 [q3]. Considere a função $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{\cos(x)} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + \int_0^x \mathrm{sen}^2(t)\mathrm{d}t\,.$$

Dentre as afirmações:

(I) f é uma função constante.

(II) f assume somente valores positivos em $[0, \pi]$.

(III) f é derivável em $(0, \pi)$.

(IV) $f(0) > 0$.

QUANTAS são verdadeiras?

A Nenhuma das afirmações.
B Somente uma afirmação.
C Somente duas afirmações.
D Somente três afirmações.
■ Todas as afirmações.

Questão 4 [q4]. Seja $f(x) = \dfrac{x}{1+x^6}$. Usando série de potências podemos deduzir que as derivadas de ordens 2023 e 2024 de f em zero são, respectivamente:

A $-2023!$ e $2024!$.
B $2023!$ e 0.
C 0 e $2024!$.
■ $-2023!$ e 0.
E Nenhuma das outras alternativas.

Questão 5 [q5]. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função dada. O *módulo de continuidade* de f é a função $\omega : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\omega(s) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a, b], |x - y| < s\}\,.$$

Qual dentre as afirmações seguintes garante que $\lim_{s\to 0^+} w(s) = 0$?

A f é limitada.
■ f é uniformemente contínua.
C f é não-decrescente.
D f é integrável.
E Nenhuma das outras opções.

Questão 6 [q6]. Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função contínua, e $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de pontos em $\mathbb{R}^m$. Faça $A = \{a_n : n \geq 1\} \subset \mathbb{R}^m$, e considere as seguintes condições:

(1) $(a_n)_{n\geq 1}$ é limitada.

(2) $(a_n)_{n\geq 1}$ é de Cauchy.

(3) O conjunto A é denso em $\mathbb{R}^m$.

(4) O conjunto A possui um número finito de pontos de acumulação em $\mathbb{R}^m$.

Considere também as seguintes afirmações:

(I) A sequência $(f(a_n))_{n\geq 1}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}^m$.

(II) O conjunto $f^{-1}(A)$ é denso em $\mathbb{R}^m$.

(III) O conjunto $f(A)$ é denso em $\mathbb{R}^m$.

(IV) O conjunto $f(A)$ é limitado em $\mathbb{R}^m$.

Qual das opções abaixo corresponde às implicações que são sempre verdadeiras?

A (2) implica (I) e (3) implica (II).

B (2) implica (II) e (3) implica (III).

■ (2) implica (I) e (1) implica (IV).

D (3) implica (I) e (4) implica (IV).

E (1) implica (I) e (4) implica (IV).

Questão 7 [q7]. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear cuja matriz com relação a uma dada base de $\mathcal{V}$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sendo I a identidade em $\mathcal{V}$, marque a alternativa que fornece todos os autovalores do operador $T^5 - 3T^3 - 4I$.

■ -6, -4, 4

B -1, 2, 32

C 0, -4, 8

D 0, 1, 2

E -3, 4, 5

Questão 8 [q8]. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ uma transformação linear cujo polinômio característico é $p(\lambda) = -\lambda(4-\lambda)(5-\lambda)(\lambda^2+1)$. Marque a alternativa correta:

■ A imagem de T tem dimensão 4.

B T é diagonalizável.

C T é injetora.

D Existe uma base B de $\mathbb{R}^5$ em relação à qual tem-se $T\big((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)_B\big) = (0, x_2, x_3, 4x_4, 5x_5)_B$.

E Existe um autovalor de T com dois autovetores linearmente independentes.

Questão 9 [q9]. Lembremos que a sequência de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 1}$ é dada por $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...)$. Seja T o operador linear de $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (1, 2)$ e $T(1, 2) = (2, 3)$. Considere as seguintes afirmações:
(I) Para $n \geq 2$, T leva o par (f_{n-1}, f_n) no par (f_n, f_{n+1}).
(II) Para o conjunto $X = \{(f_n, f_{n+1}), n \geq 1\}$, temos que $T : X \to X$ é uma função bijetora.
(III) Os autovalores de T são irracionais.
(IV) T é um operador invertível.
Marque a alternativa correta:

■ Somente (I), (III) e (IV) são verdadeiras.

B Somente (I) e (II) são verdadeiras.

C Somente (II) e (III) são verdadeiras.

D Somente (I), (II) e (III) são verdadeiras.

E Todas as afirmativas são verdadeiras.

Questão 10 [q10]. Considere $\mathcal{P}_1$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais de grau no máximo 1 munido do produto interno

$$\langle p, q\rangle_1 = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt.$$

Seja $T : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(p) = (p(0), p'(0))$, sendo que p' é a derivada de p. Pode-se dizer que T é uma isometria se colocarmos em $\mathbb{R}^2$ o produto interno $\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle_2 =$

■ $x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_1 + \frac{1}{3}y_1y_2$

B $\frac{1}{2}x_1x_2 + x_1y_2 + \frac{1}{3}x_2y_1 + \frac{1}{2}y_1y_2$

C $x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$

D $x_1x_2 + y_1y_2$

E $x_1x_2 + \frac{1}{2}y_1y_2$

Questão 11 [q11]. Considere um espaço vetorial real $\mathcal{V}$ de dimensão finita munido com um produto interno. Seja $T : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador autoadjunto. Considere as seguintes afirmações:
(I) Se 3 e 4 são autovalores de T, então existe $v \in \mathcal{V}$ tal que $||v|| = \sqrt{2}$ e $||T(v)|| = 5$.
(II) O operador $T^2 + 2T + 2I$, sendo I a identidade em $\mathcal{V}$, é um isomorfismo.
(III) Existe um operador linear $S : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tal que $S^3 = T$.
Marque a alternativa correta:

■ Todas as afirmações são verdadeiras.

B Somente (I) e (II) são verdadeiras.

C Somente (I) e (III) são verdadeiras.

D Somente (II) e (III) são verdadeiras.

E Apenas uma afirmação é verdadeira.

Questão 12 [q12]. Seja $\mathcal{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita. Considere as seguintes afirmações:
(I) Considere dois produtos internos em $\mathcal{V}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ de modo que um conjunto é ortogonal com relação a $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ se, e somente se, for ortogonal a $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$. Então os produtos internos são iguais.
(II) Se B é uma base de $\mathcal{V}$, então existe um produto interno em $\mathcal{V}$ com relação ao qual B é um conjunto ortonormal.
(III) Suponha que $\mathcal{V}$ seja munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sejam $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{V}$ e T um operador linear em $\mathcal{V}$ tal que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{V}$. Então $\langle u,v\rangle_1 = \langle T^2(u), T^2(v)\rangle$ define um produto interno em $\mathcal{V}$ que satisfaz $\langle u,v\rangle_1 = 0$ se, e somente se, $\langle u,v\rangle = 0$.
Marque a alternativa correta:

- ■ Somente (II) e (III) são verdadeiras.
- B Somente (I) e (II) são verdadeiras.
- C Somente (I) e (III) são verdadeiras.
- D Apenas uma afirmação é verdadeira.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 13 [q13]. Seja S_7 o grupo de permutações de 7 elementos. O conjunto das ordens dos elementos de S_7 é:

- A {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}.
- B {1,2,3,4,5,6,7,9,10,12}.
- C $\{\ d \in \mathbb{N} : d \,\text{divide}\ 7!\}$.
- ■ {1,2,3,4,5,6,7,10,12}.
- E $\{1, 2, 3, 4, \dots, 7!\}$.

Questão 14 [q14]. Sejam S_3 o grupo de permutações de 3 elementos e $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos inteiros módulo 10. Sobre os homomorfismos de S_3 em $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, podemos afirmar que:

- A Só existe o homomorfismo trivial entre esse dois grupos.
- ■ Trata-se de um conjunto com exatamente 2 elementos.
- C Não existe homomorfismo entre esses dois grupos.
- D Todos esses homomorfismos têm o mesmo núcleo, dado por $H = \{1, \alpha, \alpha^2\}$, onde $\alpha = (1\,2\,3)$.
- E Todas as demais afirmações são falsas.

Questão 15 [q15]. Sejam G um grupo e H, K subgrupos de G. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $[G:H]_e$ denota a cardinalidade do conjunto das classes laterais à esquerda de H em G e $[G:H]_d$ denota a cardinalidade do conjunto das classes laterais à direita de H em G, então $[G:H]_e = [G:H]_d$.

(II) Se G é não abeliano, então existe subgrupo normal de G não trivial.

(III) Se $[G:H]_e = 2$, então H é subgrupo normal de G.

(IV) Se H é subgrupo normal de K e K é subgrupo normal de G, então H é subgrupo normal de G.

Podemos afimar que:

- A Somente (III) é verdadeira.
- B Somente (II) é falsa.
- ■ Somente (I) e (III) são verdadeiras.
- D Somente (I) e (IV) são verdadeiras.
- E Somente (I) é verdadeira.

Questão 16 [q16]. Sejam A um anel e $A[X]$ o anel de polinômios com coeficientes em A. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se A é um domínio de integridade, então todo polinômio mônico é decomposto como produto de polinômios irredutíveis.

(II) Se $f(X), g(X) \in A[X]$ e $X|f(X)g(X)$, então $X|f(X)$ ou $X|g(X)$.

(III) Se 2 é um elemento invertível, então a aplicação
$$\alpha : A[X]/\langle X^2 - 1\rangle \to A \times A,$$
$$\alpha\left(\overline{f(X)}\right) = (f(1), f(-1)),$$
é um isomorfismo.

(IV) Se M é um ideal maximal de A, então $M + \langle X\rangle$ é um ideal maximal de $A[X]$.

Indique a alternativa correta.

- A (I) e (II) são falsas.
- ■ (I) e (III) são verdadeiras.
- C (II) e (IV) são verdadeiras.
- D (II) e (III) são verdadeiras.
- E (I) e (III) são falsas.

Questão 17 [q17]. Para F um corpo, denote por $f(X), g(X) \in F[X]$ polinômios irredutíveis distintos de mesmo grau. Considere as seguintes afirmações, para cada F correspondente:

(I) $\mathbb{Q}[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{Q}[X]/\langle g(X)\rangle$.

(II) $\mathbb{R}[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{R}[X]/\langle g(X)\rangle$.

(III) $\mathbb{C}[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{C}[X]/\langle g(X)\rangle$.

(IV) $\mathbb{F}_2[X]/\langle f(X)\rangle \simeq \mathbb{F}_2[X]/\langle g(X)\rangle$.

Indique a alternativa correta:

- A (I) e (III) são falsas.
- B (II) e (IV) são falsas.
- C (II) e (III) são falsas.
- ■ (II) e (IV) são verdadeiras.
- E Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 18 [q18]**.** Sejam A um domínio de ideais principais (DIP), $Q(A)$ o corpo quociente de A e $\mathcal{P}$ o conjunto dos elementos primos de A. Suponha que $\mathcal{P}$ tenha um número infinito de elementos. Para $p \in \mathcal{P}$, considere os seguintes subanéis B_p e C_p de $Q(A)$:

$$B_p = \{a/b \in Q(A) : p \nmid b\}$$
$$C_p = \{f(1/p) : f(X) \in A[X]\}$$

É correto afirmar que:

[redacted] B_p é um anel local e C_p é um DIP.

B C_p é um anel local e B_p é um DIP.

C B_p é um anel local mas não é um DIP.

D C_p é um anel local mas não é um DIP.

E B_p e C_p são anéis locais.