Prova Extramuros 2023 - Doutorado

Observação: Esta prova tem duração de cinco (5) horas

Questão 1 (1.5p). Seja $(a_i \in \{0,1,\dots 9\} : i = 1,2,3,\dots)$ dada por

$$\cos\tfrac{1}{10} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i}.$$

Selecione as afirmações corretas.

(a) $a_4 = 0$

(b) $a_4 = 3$

(c) $a_5 = 0$

(d) $a_5 = 4$

(e) $a_6 \le 5$

(f) $a_6 > 5$

Solução 1. (a), (c) e (e) são verdadeiras.

(a) Pelo teorema do Taylor, versão TVM, existe um $\xi \in [0,1/10]$ tal que

$$\cos\tfrac{1}{10} = 1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{10^2} + \tfrac{1}{24}\tfrac{1}{10^4}\cos\xi = 1 - \tfrac{5}{1000} + \tfrac{1}{240000}\cos\xi = 0.995 + \tfrac{\cos\xi}{240000}.$$

Além disso,

$$0 < \tfrac{1}{240000}\cos\xi = \tfrac{5}{1200000}\cos\xi < \tfrac{5}{1000000}.$$

Daí, $a_4 = a_5 = 0$ e $a_6 \le 5$.

Questão 2 (1.5p). Indique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas e dê um contra-exemplo para as falsas.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, uma função continuamente diferenciável e considere $a < b$ reais. Então existe um real c, com $a < c < b$, tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

(b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, e considere o conjunto $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ x \in \mathbb{R}^n,\ y > f(x)\}$. Supondo f contínua, segue que U é conexo.

(c) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, continuamente diferenciável, com diferencial $Df(x)$ invertível para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então $f(\mathbb{R}^n)$ é aberto.

Solução 2.

(a) **Falsa.** Basta considerar $f(t) = (\cos t, \sin t)$, com $a = 0$ e $b = 2\pi$, de modo que $f(b) = f(a) = (1,0)$, com $f(b) - f(a) = (0,0)$, mas $f'(t) = (-\sin t, \cos t) \neq (0,0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, em particular para $0 = a < t < b = 2\pi$.

(b) **Verdadeira.** De fato, sejam $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in U$. Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola fechada contendo x_1 e x_2. Como B é compacta e f é contínua, segue que f é limitada em B, digamos $f(x) \leq M$, para todo $x \in B$. Considere o caminho formado pela união dos segmentos de reta $\{(x_1, y);\ y_1 \leq y \leq M+1\}$, $\{((1-\theta)x_1 + \theta x_2, M+1);\ 0 \leq \theta \leq 1\}$ e $\{(x_2, y);\ y_2 \leq y \leq M+1\}$. Então esse caminho é contínuo, está contido em U e liga (x_1, y_1) a (x_2, y_2). Portanto, U é conexo por caminhos, logo é conexo.

(c) **Verdadeira.** Seja $y_0 \in f(\mathbb{R}^n)$. Então existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x_0) = y_0$. Como $Df(x)$ é invertível, existem vizinhanças U de x_0 e V de y_0 e uma função $g : V \to U$ continuamente diferenciável tal que $f(g(y)) = y$, para todo $y \in V$. Em particular, V é um aberto na imagem $f(\mathbb{R}^n)$ contendo y_0, o que mostra que y_0 é um ponto interior de $f(\mathbb{R}^n)$. Como y_0 é arbitrário, segue que $f(\mathbb{R}^n)$ é aberto.

Questão 3 (1.5p). Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, contínua e homogênea de grau $p \in \mathbb{R}$ (i.e. $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e todo $\lambda > 0$). Selecione as afirmações corretas.

(a) Se f é aberta (i.e. f leva aberto U de $\mathbb{R}^n$ em aberto $f(U)$ de $\mathbb{R}^m$), então $p \neq 0$.

(b) Se f é aberta, então f é sobrejetiva.

(c) Se f é sobrejetiva então f é aberta.

Solução 3. (a) **Verdadeira.** Caso contrário, se $p = 0$, então $f(x) = f(\|x\|x/\|x\|) = \|x\|^0 f(x/\|x\|) = f(x/\|x\|)$, para todo $x \neq 0$, e a imagem do aberto $U = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ seria igual à imagem da esfera unitária, que é compacta, de modo que $f(U)$ também seria compacto, vista que f é continua. Como $f(U)$ não é vazio, então $f(U)$ não pode ser aberto, pois o único subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que é aberto e compacto é o conjunto vazio. Ou seja, mostramos que se $p = 0$ então f não é aberta, o que significa que se f é aberta, então $p \neq 0$.

(b) **Verdadeira.** Sendo f aberta, já sabemos que $p \neq 0$. Escolhendo $U = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| < 1\}$, temos que $f(U)$ é aberto, por hipótese. Naturalmente, $f(0) = f(\lambda 0) = \lambda^p f(0)$, para todo $\lambda > 0$, de modo que $f(0) = 0$, visto que $p \neq 0$ e, com isso, λ^p pode assumir valores diferentes de 1. Assim, $f(U)$ é um aberto que contém a origem. Sendo assim, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta = (-\delta, \delta) \subset f(U)$. Vamos usar isso para mostrar que f é sobrejetiva. Já vimos que $0 \in \mathbb{R}$ está na imagem de f. Seja, agora, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, arbitrário. Definindo $\gamma = 2|y|/\delta$, temos $y_0 = y/\gamma \in B_\delta \subset f(U)$. Logo existe $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) = y_0$. Tomando $x = \gamma^{1/p} x_0$ e usando que $\gamma > 0$ e, portanto, $\lambda = \gamma^{1/p} > 0$, temos $f(x) = f(\lambda x_0) = \lambda^p f(x_0) = \gamma y_0 = y$, ou seja $y \in f(U)$ também. Logo, f é sobrejetiva.

(c) **Falsa.** Considere $m = 2$ e $f(x, y) = xy^2$. Observe que $f(x, 1) = x$, de modo que $f(\mathbb{R} \times \{1\}) = \mathbb{R}$, mostrando que f é sobrejetiva. No entanto, escolhendo o semiplano $x > 0$, ou seja, escolhendo o conjunto aberto $U = (0, \infty) \times (-\infty, \infty)$, temos que a imagem $f(U)$ de U por f é o semi-eixo positivo $f(U) = [0, \infty)$, que não é aberto em $\mathbb{R}$. Logo, pode não ser verdade, em geral, que f é aberta caso seja sobrejetiva.

Questão 4 (1p). Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$$

é um conjunto limitado. Selecione as afirmações corretas.

(a) Seja $n = 2$. Então existe $R > 0$ tal que ou $\{\|x\| > R : f(x) > g(x)\}$ ou $\{\|x\| > R : f(x) < g(x)\}$ é vazio.

(b) Seja $n = 1$. Então existe $R > 0$ tal que um dos conjuntos $\{\|x\| > R : f(x) > g(x)\}$ ou $\{\|x\| > R : f(x) < g(x)\}$ é vazio.

Solução 4. Só (a) é verdadeira.

(a) Verdadeira. Os conjuntos $A_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > g(x)\}$ e $A_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < g(x)\}$ são disjuntos e abertos. Seja $R := \sup\{\|x\| : f(x) = g(x)\}$. Então, se $A_1 \cap \{x : \|x\| > R\}$ e $A_2 \cap \{x : \|x\| > R\}$ fossem abertos, existiria uma decomposição do conexo $\{x : \|x\| > R\}$ em conjuntos abertos não-trivias.

(b) Falsa. Para $n = 1$, considere $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$.

Questão 5 (1p). Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma funçao diferenciável em $(0,1)$ com $f(0) = f(1) = 0$. Selecione as afirmações corretas.

(a) Existe uma sequência (n_k) com $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ tal que (f_{n_k}) converge pontualmente a uma função contínua.

(b) Se existe $K > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq K$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então existe uma sequência (n_k) com $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ tal que (f_{n_k}) converge pontualmente a uma função contínua.

(c) Se existe $K > 0$ tal que $|f_n'(x)| \leq K$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então existe uma sequência (n_k) com $n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ tal que (f_{n_k}) converge pontualmente a uma função diferenciável.

Solução 5. Só (b) é verdadeira.

(a) Falsa. Considere, p.ex., $f_n(x) = n(x-1)x$.

(b) Verdadeira. Pelo TVM, $|f_n(x) - f_n(y)| \leq \sup_x\{|f_n'(x)|\}|x-y| \leq K|x-y|$. Daí, (f_n) é equicontínua. Substituindo $y = 0$, obtém-se que $|f_n|$ é uniformemente limitado. Daí, (n_k) existe por Arzéla-Ascoli.

(c) Falsa: $x \mapsto \min\{x, 1-x\}$ pode ser aproximada por funções diferenciável com valor absoluto da derivada limitada por 1.

Questão 6 (1.5p). Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^3$ e seja $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathscr{C}^1$. Considere um conjunto de nível $S = \{(x, y, z),\ \varphi(x, y, z) = c\}$ de φ, para algum $c \in \mathbb{R}$, e suponha que $u_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ seja tal que todas as derivadas parciais de φ em u_0 sejam diferentes de zero. Desse modo, em uma vizinhança U de u_0, podemos escrever $S \cap U$ em qualquer uma das formas $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ e $h = g(x, y)$, para funções apropriadas f, g e h continuamente diferenciáveis, definidas em subconjuntos apropriados de $\mathbb{R}^2$. Indique, abaixo, o valor correto do produto

$$\alpha = \frac{\partial f(y_0, z_0)}{\partial y} \frac{\partial g(x_0, y_0))}{\partial z} \frac{\partial h(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

(a) $\alpha = -1$. (b) $\alpha = 0$. (c) $\alpha = 1$.

Solução 6. Resposta: $\alpha = -1$. De fato, derivando $\varphi(f(y, z), y, z) = c$ em relação a y, obtemos $\varphi_x f_y + \varphi_y = 0$. Derivando $\varphi(x, g(x, z), z) = c$ em relação a z, obtemos $\varphi_y g_z + \varphi_z = 0$. Derivando

$$\varphi(x, y, h(x, y)) = c$$

em relação a x, obtemos $\varphi_x + \varphi_z h_x = 0$. Todas as derivadas em pontos envolvendo x_0, y_0, z_0. Como as derivadas parciais de φ no ponto u_0 não se anulam, obtemos $f_y(y_0, z_0) = -\varphi_y(u_0)/\varphi_x(u_0)$, $g_z(x_0, z_0) = -\varphi_z(u_0)/\varphi_y(u_0)$ e $h_x(x_0, y_0) = -\varphi_x(u_0)/\varphi_z(u_0)$. Assim,

$$f_y g_z h_x = (-\varphi_y/\varphi_x)(-\varphi_z/\varphi_y)(-\varphi_x/\varphi_z) = -1.$$

Questão 7 (1.5p). Considere a integral de linha

$$I_n = \int_{C_n} \frac{1}{x^2+y^2}(x\,dy - y\,dx),$$

onde C_n é o círculo $(x-n)^2 + y^2 = (3/2)^2$. Então, selecione as afirmações corretas:

(a) $I_0 = 2\pi$, (b) $I_1 = 0$, (c) $I_2 = 0$,

Solução 7. Seja $\theta = \frac{1}{x^2+y^2}(x\,dy - y\,dx)$. Primeiro, verificamos que $d\theta = 0$.

$$\begin{aligned} d\theta &= \left(\frac{x^2+y^2-x.2x}{(x^2+y^2)^2}\right)dx\wedge dy - \left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)dy\wedge dx, \\ &= \frac{-x^2+y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Isso é dizer que θ é uma 1-forma fechada em $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Observamos que os círculos C_2 e C_3 são homólogos a 0 em $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, então pelo teorema de Stokes, $\int_{C_2}\theta = \int_{C_3}\theta = 0$. Também, C_0 e C_1 são homólogos um ao outro em $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, então $\int_{C_0}\theta = \int_{C_1}\theta$. Esse valor pode ser calculado pela integral de linha em C_0:

$$\begin{aligned} x = 3/2\cos(t), &\qquad y = 3/2\mathrm{sen}(t), \\ dx = -3/2\mathrm{sen}(t)dt, &\qquad dy = 3/2\cos(t)dt, \\ \int_{C_0}\theta &= \int_0^{2\pi}\frac{(3/2)^2(\cos^2(t)+\mathrm{sen}^2(t))}{(3/2)^2}dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Questão 8 (2p). Nesta questão, $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ denota o conjunto das funções contínuas de $[0,1]$ a $\mathbb{R}$, munido com a norma $\|\varphi\|_\infty := \sup\{|\varphi(x)| : x\in[0,1]\}$. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} F &:= \left\{\varphi\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) : \varphi \text{ é diferenciável, } \varphi(0)=1 \text{ e } 0\le\varphi'(x)<\varphi(x)\right\} \\ G &:= \left\{\varphi\in\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) : |\varphi(x)|\le 1+\int_0^x|\varphi(s)|ds\right\}. \end{aligned}$$

Então podemos afirmar que:

(a) F e G são equicontínuos e G é compacto.

(b) F é equicontínuo, G não é equicontínuo, G não é compacto mas é fechado.

(c) F e G não são equicontínuos e não são compactos.

(d) F é equicontínuo, G é fechado e F é compacto.

Solução 8. Só (b) é verdadeira.
Se $\varphi \in F$, então $(\log \varphi) = \varphi'/\varphi < 1$. Então,

$$\log \varphi(x) = \log \varphi(x) - \log \varphi(0) = \int_0^x \varphi'(t)/\varphi(t)\,dt < \int_0^x 1\,dt = x.$$

Ou seja, $1 \leq \varphi(x) < e^x$ para qualquer $x \in [0,1]$. Em particular, F é limitado. Além disso, é equicontínuo pois

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \|\varphi'\|_\infty |x - y| < e|x - y|.$$

Seja $\varphi_n(x) := e^x(1 - x/n)$. Então $\varphi_n(0) = 1$ e $\varphi_n'(x) = e^x(1 - 1/n - x/n) < e^x(1 - x/n) = \varphi_n(x)$. Como $\lim_n \varphi_n(x) = e^x$, F não é fechado.
Do outro lado, G é fechado pois a integral é contínua em relação com a convergência uniforme. Além disso, a função definida por $\varphi_n(x) := \min\{1, n - nx\}$ pertence a G. Em particular G não é equicontínuo em 1.

Questão 9 (2p). Considere as seguintes afirmações para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

I A interseção arbitrária de conjuntos convexos é um conjunto convexo.

II Seja A aberto. Então $A = \operatorname{int}(\overline{A})$.

III Todo conjunto infinito $X \subset \mathbb{R}^n$ possui um subconjunto não compacto.

IV A interseção de dois conjuntos conexos não vazios é conexa.

Então, as seguintes são verdadeiras:

(a) I, III

(b) III, IV

(c) I, II, IV

(d) I, III, IV

Solução 9. I Sim.

II Não: existem conjuntos abertos e densos com medida de Lebesgue finita.

III Sim. Seja (x_n) uma sequência com elementos dois-a-dois distintos. Se $A = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ é ilimitado, A não é compacto. Se A é limitado, basta considerar $A \setminus \{p\}$ onde p é um ponto de acumulação de A. Note que p existe por Bolzano-Weierstraß.

IV Não. Considere, por exemplo, $\{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0,\pi]\}$ e $\{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [\pi, 2\pi]\}$

Questão 10 (1.5p). Seja $\Delta \subset [0,1]^n$, $n \geq 1$ tal que o fecho de Δ é $[0,1]^n$ (i.e., Δ é denso em $[0,1]^n$), e suponha que $f : \Delta \to \mathbb{R}$ é contínua. Nesta questão, $g|_\Delta$ denota a restrição de g a Δ. Selecione todas as afirmações corretas.

(a) Então, existe uma função contínua $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ tal que $g|_\Delta = f$.

(b) Se f é Lipschitz contínua (i.e. existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|$ $\forall x, y \in \Delta$), então existe uma função Lipschitz contínua $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ tal que $g|_\Delta = f$.

(c) Se existe $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g|_\Delta = f$, então f é unicamente determinado.

Solução 10. (b,c) são verdadeiras.

(a) Seja $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$. Então, $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

(b) Note que a condição de Lipschitz implica que $(f(x_n))$ é uma sequencia de Cauchy se (x_n) é Cauchy. Em particular, $\lim_n f(x_n)$ existe. Sejam $x, y \in [0,1]^n$ e $(x_n), (y_n)$ sequencias tal que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Então,

$$\lim_n |f(x_n) - f(y_n)| \leq C \lim \|x_n - y_n\| = C\|x - y\|.$$

Em escolher $x = y$, ontém-se que a função def. por $\overline{f}(x) := \lim_n f(x_n)$ é bem definida. Além disso, para x, y qualquer, obtém-se que $\overline{f}$ é Lipschitz.

(c) A continuidade e existencia de $\overline{f}$ implica que

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n) = \overline{f}(x)$$

para (x_n), (y_n) com $x_n \to x$, $y_n \to x$. Então, qualquer extensão contínua de f tem que ser igual a $\overline{f}$.

Como preencher a folha de respostas. Por favor, preencha os dados de identificação e marque claramente os quadrados escolhidos. No caso de um engano, pede ou uma folha de respostas nova ou coloque uma nota na rodapé com a resposta desejada.

Pontuação. A pontuação de uma questão é determinado pela formula

$$(\text{Pontuação max.}) \times \max\left\{0, \frac{\#\{\text{respostas corretas}\} - \#\{\text{respostas erradas}\}}{\#\{\text{respostas}\}}\right\}.$$

Exemplo: No caso de uma questão com 3 pontos, 2 respostas corretas, uma errada e três indecididas, a pontuação final é $3 \times \frac{2-1}{6} = 0.5$.

Prova Extramuros 2023 - Doutorado

Identidade e respostas

Nome: ______________________

Identidade ☐ Passaporte ☐ Cédula de identidade

Identidade (numero) ______________________

Instituição de aplicação ______________________

Assinatura ______________________

Resposta 1 (1.5p).

(a) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(b) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(c) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(d) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(e) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(f) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

Resposta 2 (1.5p).

(a) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(b) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(c) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

Resposta 3 (1.5p).

(a) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(b) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(c) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

Resposta 4 (1p).

(a) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(b) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

Resposta 5 (1p).

(a) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(b) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(c) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

Resposta 6 (1.5p).

(a) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(b) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(c) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

Resposta 7 (1.5p).

(a) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(b) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(c) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

Resposta 8 (2p).

(a) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(b) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(c) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(d) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

Resposta 9 (2p).

(a) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(b) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(c) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(d) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

Resposta 10 (1.5p).

(a) ☐ verdadeira ■ falso ☐ não sei

(b) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei

(c) ■ verdadeira ☐ falso ☐ não sei