Prova Extramuros 2022 - Doutorado

Observação: Esta prova tem duração de cinco (5) horas

Questão 1 (1p)**.** Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto ($n \geq 2$) e $f : U \to \mathbb{R}$ parcialmente diferenciável em U com derivadas parcias contínuas em U. Selecione as afirmações corretas.

(a) f é contínua em 0.

(b) f é continuamente diferenciável em U.

Solução 1. (a) 0 não pertence necessariamente a U.

(b) P. ex. Theorem 6.3.8 em Tao - Analysis II, 3rd edition. Texts and Readings in Mathematics, Volume 38 (2016).

Questão 2 (1p)**.** Seja $\Delta \subset [0,1]^n$, $n \geq 2$ tal que o fecho de Δ é $[0,1]^n$ (i.e., Δ é denso em $[0,1]^n$). Suponha que U é um aberto tal que $\Delta \subset U$. Selecione as afirmações corretas.

(a) $U \supset [0,1]^n$.

(b) U é denso em $[0,1]^n$.

Solução 2. U é denso pois $[0,1]^n = \overline{\Delta} \subset \overline{U} \subset [0,1]^n$. Do outro lado, se Δ possui uma representação $\Delta = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ (i.e. Δ é enumerável),

$$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y : \|x_n - y\| \leq 3^{-n}\}$$

é aberto e $\mathrm{Vol}(U) \leq 1/2$. Daí, $[0,1]^n$ não é um subconjunto de U.

Questão 3 (1.5p)**.** Considere o conjunto de sequências $\Sigma = \{(a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \{0,1\}\}$. Dado $\theta = (a_n)_{n\geq 1} \in \Sigma$ associe o número

$$\omega(\theta) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{3^n}.$$

Para o conjunto de números reais $\Lambda = \{\omega(\theta) : \theta \in \Sigma\}$ selecione as afirmações corretas.

(a) Λ é fechado.

(b) Λ é conexo

(c) Λ não tem pontos isolados.

Solução 3.
Considere a métrica d em Σ dada por $d(\theta,\beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}$, onde $\theta = (a_n)$ e $\beta = (b_n)$. O espaço (Σ, d) é métrico compacto. Além disso, ω torna-se uma função continua.

(a) Λ é compacto, sendo imagem de um conjunto compacto por uma função continua.

(b) Λ é um conjunto de medida zero. Daí, Λ contém nenhum intervalo. Do outro lado, $0 = \omega(0,0,\ldots) \in \Lambda$ e $1/2 = \omega(1,1,\ldots) \in \Lambda$.

(c) Seja $x = \omega((a_n)) \in \Lambda$ e $k \in \mathbb{N}$. Para $(\overline{a}_n)$ definido por $\overline{a}_n := a_n$ para $n \neq k$ e $\overline{a}_k := a_k + 1 \mod 2$, obtém-se que

$$|\omega((a_n)) - \omega((\overline{a}_n))| = 3^{-k}.$$

Daí, x não é isolado.

Questão 4 (1p)**.** Seja U uma vizinhança de 0 em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função tal que o limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t}$$

existe para qualquer $v \in \mathbb{R}^n$. Selecione as afirmações corretas.

(a) f é contínua em 0.

(b) f é diferenciável em 0.

Solução 4. Escolhe uma função ilimitada $g : \{x : \|x\| = 1\} \to \mathbb{R}$ e define $f(x) := \|x\| g(x/\|x\|)$. Como g é ilimitada, existe x_n tal que $|g(x_n)| > n^2$. Daí, $\lim_n |f(x_n/n)| \geq \lim_n n = \infty$.

Questão 5 (1.5p)**.** Assuma que a série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, $a_n \geq 0$. Selecione as afirmações corretas.

(a) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n}$ converge.

(b) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

(c) A série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n^{2/3}}$ diverge.

Solução 5. (a) Note simplesmente que $0 \leq \frac{a_n}{n} \leq a_n$. Portanto, pelo critério de comparação a série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{n}$ converge.

(b) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_i}}{i}\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\Big)$$

Como por hipóteses $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge and a p-série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge, então o lado direito da desigualdade anterior é limitado, logo $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\sqrt{a_i}}{i}$ é limitado e sendo a soma parcial de números não negativos temos a convergência da série em questão.

(c) Analogamente, como no item (b) a série converge.

Questão 6 (1p)**.** É possível representar o conjunto dos (x, y, z) tais que $xy - z\log y + e^{yz} - e = 0$ na forma $z = f(x, y)$ nas proximidades do ponto $(0, 1, 1)$?

Solução 6. Seja $g(x, y, z) = xy - z\log y + e^{yz} - e$, definida em $\mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Temos que $g(0, 1, 1) = 0$ e g é C^1. Além disso,

$$\frac{\partial g}{\partial z}(x, y, z) = -\log y + ye^{yz},$$

logo $\frac{\partial g}{\partial z}(0, 1, 1) = e \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma vizinhança do ponto $(0, 1, 1)$ onde o conjunto $\{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ é o gráfico de uma função C^1, $f(x, y)$, ou seja, $\{(x, y, z) : z = f(x, y)\}$.

Questão 7 (1p)**.** O ponto $P = (1, -1, 2)$ pertence à interseção das superfícies definidas por $x^2(y^2 + z^2) = 5$ e $(x - z)^2 + y^2 = 2$. A curva formada pela interseção dessas duas superfícies admite, perto do ponto P, uma parametrização da forma $(x, f(x), g(x))$.

Solução 7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = \big(x^2(y^2 + z^2) - 5, (x - z)^2 + y^2 - 2\big).$$

Então, $f(P) = 0$. A matriz $[f'(x, y, z)]$ tem 2 linhas e 3 colunas. Como queremos expressar as variáveis y, z em função de x, temos de ver se é não nulo o determinante da submatriz de $[f'(P)]$ formada apenas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Calculando essas derivadas, avaliando em P, e calculando o determinante vemos que ele vale $4 \neq 0$. Assim, pelo Teorema da Função Implícita, existe uma função $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo suficientemente pequeno $(1-\delta, 1+\delta)$ tal que para todo $x \in I$, o conjunto $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = (0,0)\}$ é o gráfico $\{(x,y,z) : (y,z) = \varphi(x)\}$. Escrevendo $\varphi(x) = (f(x), g(x))$, obtemos o resultado.

Questão 8 (2p)**.** Considere a integral de linha

$$I_n = \int_{C_n} \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\,dy - y\,dx\right),$$

onde C_n é o círculo $(x-n)^2 + y^2 = (3/2)^2$. Então, selecione as afirmações corretas :

(a) $I_0 = 0$,

(b) $I_1 = 0$,

(c) $I_2 = 0$,

(d) $I_3 = 2\pi$.

Solução 8. Seja $\theta = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x\,dy - y\,dx\right)$. Primeiro, verificamos que $d\theta = 0$:

$$\begin{aligned} d\theta &= \left(\frac{x^2+y^2-x.2x}{(x^2+y^2)^2}\right) dx \wedge dy - \left(\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dy \wedge dx, \\ &= \frac{-x^2+y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Isso é dizer que θ é uma 1-forma fechada em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Observamos que os círculos C_2 e C_3 são homólogos a 0 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, então pelo teorema de Stokes, $\int_{C_2} \theta = \int_{C_3} \theta = 0$. Também, C_0 e C_1 são homólogos um ao outro em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, então $\int_{C_0} \theta = \int_{C_1} \theta$. Esse valor pode ser calculado pela integral de linha em C_0:

$$\begin{aligned} x = 3/2\cos(t), &\qquad y = 3/2\operatorname{sen}(t), \\ dx = -3/2\operatorname{sen}(t)dt &\qquad dy = 3/2\cos(t)dt \\ \int_{C_0} \theta &= \int_0^{2\pi} \frac{(3/2)^2(\cos^2(t)+\operatorname{sen}^2(t))}{(3/2)^2} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Questão 9 (1p)**.** Considere o espaço V das matrizes $n \times n$, munido da norma qualquer. Dizemos que $B \in V$ é uma raiz quadrada de A se $B^2 = A$. Existe $\delta > 0$ tal que, se $\|A - I\| < \delta$, então A admite uma raiz quadrada.

Solução 9. Primeiro observe que $I^2 = I$, logo I admite raiz quadrada. Considere a função $f : V \to V$, $f(B) = B^2$. Calculemos sua derivada. Temos

$$f(B+H) = B^2 + BH + HB + H^2.$$

Então, pondo $\epsilon(H) = H^2$, vemos que para cada $B \in V$, $f'(B)$ é o operador linear de V em V que a cada $H \in V$ faz corresponder $f'(B)(H) = BH+HB$. Assim, $f'(I)(H) = 2H$ (ou, por outras palavras, $f'(I) = 2I$). Vemos então que $f'(I) \in \mathrm{GL}(V)$ é invertível.
Supondo que provámos que $f \in C^1$, então pelo Teorema da Função Inversa, concluímos que existe W uma vizinhança suficientemente pequena de $f(I)$, que podemos tomar da forma $\{A : \|A - f(I)\| < \delta\}$, tal que f^{-1} é uma bijeção entre W e uma vizinhança de I. Isso quer dizer exatamente que para cada A em W, existe um (único) B (que está perto de I) tal que $f(B) = A$, ou $B^2 = A$.

Questão 10 (1.5p)**.** Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável com inversa diferenciável. Um ponto p é dito fixo se $f(p) = p$. Para um ponto fixo p denotemos por

$$\sigma_p(f) = \{\lambda : \lambda \text{ é um autovalor de } Df_p\}$$

o espectro da diferencial de Df_p.
Além disso, dizemos que p é hiperbólico se $\sigma_p(f) \cap S^1 = \emptyset$, *i.e.*,, não existe autovalores de modulo 1. Selecione as afirmações corretas.

(a) Sempre existem pontos fixos.

(b) Pontos fixos são isolados.

(c) Pontos fixos hiperbólicos são isolados.

Solução 10. (a) Tome $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e tome $f(x) = x + v$. Claramente, f não tem pontos fixos. Logo a afirmação é falsa.

(b) Tome $f(x) = x$. Logo a afirmação é falsa.

(c) Assuma que $f(p) = p$ é fixo hiperbólico. Assuma por contradição que existe p_n pontos fixos *i.e.*, $f(p_n) = p_n$ tal que $p_n \to p$. Então usando a série de Taylor para f centrada em p temos

$$p - p_n = f(p) - f(p_n) = Df(p)(p - p_n) + A(P - P_n),$$

onde $\lim_{n\to\infty} \frac{A(p-p_n)}{||p-p_n||} = 0$. Como $\left|\frac{p-p_n}{||p-p_n||}\right| = 1$, então passando a uma subsequência assuma que $\frac{p-p_n}{||p-p_n||} \to v \neq 0$. Portanto, passando da equação anterior temos que $Df(p)(v) = v$ e p não é fixo hiperbólico.

Questão 11 (Cancelada)**.** Seja $\Delta \subset [0,1]^n$, $n \geq 1$ tal que o fecho de Δ é $[0,1]^n$ (i.e., Δ é denso em $[0,1]^n$), e suponha que $f : \Delta \to \mathbb{R}$ é contínua. Selecione todas as afirmações corretas.

(a) Então, existe uma função contínua $\overline{f} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ tal que $f|_\Delta = \overline{f}$.

(b) Se f é limitado, então existe uma função contínua $\overline{f} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ tal que $f|_\Delta = \overline{f}$.

(c) Se f é Lipschitz contínua[1], então existe uma função Lipschitz contínua $\overline{f} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ tal que $f|_\Delta = \overline{f}$.

(d) Se existe $\overline{f} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f|_\Delta = \overline{f}$, então f é unicamente determinado.

Solução 11. (a,b) Seja $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$. Então, $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe.

(c) Note que a condição de Lipschitz implica que $(f(x_n))$ é uma sequencia de Cauchy se (x_n) é Cauchy. Em particular, $\lim_n f(x_n)$ existe. Sejam $x, y \in [0,1]^n$ e $(x_n), (y_n)$ sequencias tal que $x_n \to x$ e $y_n \to y$. Então,

$$\lim_n |f(x_n) - f(y_n)| \leq C \lim \|x_n - y_n\| = C\|x - y\|.$$

Em escolher $x = y$, ontém-se que a função def. por $\overline{f}(x) := \lim_n f(x_n)$ é bem definida. Além disso, para x, y qualquer, obtém-se que $\overline{f}$ é Lipschitz.

(d) A continuidade e existencia de $\overline{f}$ implica que

$$\lim_n f(x_n) = \lim_n f(y_n) = \overline{f}(x)$$

para (x_n), (y_n) com $x_n \to x$, $y_n \to x$. Então, qualquer extensão contínua de f tem que ser igual a $\overline{f}$.

Observação: No enunciado, há um erro de digitação: $f|_\Delta = \overline{f}$ deve-se ler $\overline{f}|_\Delta = f$. Por esta razão, a questão foi cancelada.

Questão 12 (1.5p)**.** Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado tal que para cada par de elementos $x, y \in A$, existe um caminho $\gamma : [0,1] \to A$ contínuo e retificável[2] com $\gamma(0) = x$ a $\gamma(1) = y$. Além disso, seja

$$\delta(x, y) := \inf\{\ell(\gamma) : \gamma : [0,1] \to A \text{ cont. e retificável com } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\},$$

onde $\ell(\gamma)$ é o comprimento da curva γ. Selecione todas as afirmações corretas :

[1] A função f é Lipschitz contínua se existe $C > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq C\|x - y\|$ $\forall x, y \in \Delta$.

[2] Ou seja, $\ell(\gamma) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \|\gamma(k/n) - \gamma((k-1)/n)\|$ existe e é finito.

(a) δ é uma métrica

(b) $\sup\{\delta(x,y) : x, y \in A\} < \infty$

(c) Se A é compacta, $\sup\{\delta(x,y) : x, y \in A\} < \infty$

Solução 12. (a) A desigualdade triangular é uma consequencia do fato que a concatenação de dois caminhos retificáveis é retificável. Para ver que $\delta(x,y) > 0$ para $x \neq y$ basta aplicar o fato que o $\mathbb{R}^n$ é um espaço geodésico.

(b-c) Escolhe uma curva $\gamma_1 : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ diferenciável e injetora tal que $\gamma([0,\infty))$ é um conjunto limitado e $\gamma(\infty) := \lim_t \gamma(t) \notin \gamma([0,\infty))$. Além disso, escolhe um caminho $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ retificável de $\gamma(0)$ a $\gamma(\infty)$ tal que $\tilde{\gamma}([0,1]) \cap \gamma([0,\infty)) = \{\gamma(0)\}$. Por exemplo, $n = 3$ e

$$\gamma(t) := \frac{1}{t}(\cos t, \sin t, 0),\ \tilde{\gamma}(t) := (t, 0, t(1-t)).$$

Neste caso, A é compacto e A é homeomorfo a um círculo. Em particular, para qualquer par $x, y \in A$, existe um caminho de x a y que não passa por $\gamma(\infty)$. Em particular, este caminho é retificável.

Do outro lado,

$$\lim_{t\to\infty} \delta(\gamma(\infty), \gamma(t)) = \lim_{t\to\infty} \ell(\tilde{\gamma}) + \ell(\gamma|_{[0,t]}) = \infty.$$

Observação: Note que todo espaço métrico compacto tem diâmetro finito. Porém, o exemplo acima mostre que a topologia induzida por δ não necessariamente é compacta.

Pontuação. A pontuação de uma questão é determinado pela formula

$$(\text{Pontuação max.}) \times \max\left\{0, \frac{\#\{\text{respostas corretas}\} - \#\{\text{respostas erradas}\}}{\#\{\text{respostas}\}}\right\}.$$

Exemplo: No caso de uma questão com 3 pontos, 2 respostas corretas, uma errada e três indecididas, a pontuação final é $3 \times \frac{2-1}{6} = 0.5$.

Prova Extramuros 2022 - Doutorado

Identidade e respostas

Nome: ____________________

Identidade ☐ Passaporte ☐ Cédula de identidade

Identidade (numero) ____________________

Instituição de aplicação ____________________

Assinatura ____________________

Resposta 1 (1p).

(a) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(b) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

Resposta 2 (1p).

(a) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(b) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

Resposta 3 (1.5p).

(a) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

(b) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(c) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

Resposta 4 (1p).

(a) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(b) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

Resposta 5 (1.5p).

(a) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

(b) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

(c) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

Resposta 6 (1p).

(a) ■ verídica ☐ falso

Resposta 7 (1p).

(a) ■ verídica ☐ falso

Resposta 8 (2p).

(a) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(b) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(c) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

(d) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

Resposta 9 (1p).

(a) ■ verídica ☐ falso

Resposta 10 (1.5p).

(a) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(b) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(c) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

Resposta 11 (0p).

(a) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(b) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(c) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

(d) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

Resposta 12 (1.5p).

(a) ■ verídica ☐ falso ☐ não sei

(b) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei

(c) ☐ verídica ■ falso ☐ não sei