Notas em Análise Real

Andrew Clarke

Maio de 2024

Contents

1 Derivadas

1.1 Propriedades Básicas de Derivadas e Funções Deriváveis

Definição 1.1. Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um subconjunto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$ um ponto de acumulaçao de A. Dizemos que f é **derivável** ou **diferenciável** em $x_0 \in A$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + a(x - x_0))}{x - x_0} = 0.$$

Equivalentemente, trocando $h = x - x_0$, é o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(x_0 + h) - (f(x_0) + ah) \right) = 0.$$

Proposição 1.2. *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ e x_0 um ponto de acululação de A. Uma função $f : A :\to \mathbb{R}$ é derivável em x_0 se e somente se o seguinte limite existe:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Definição 1.3. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in A$ um ponto de acumulação de A. Se f é derivável em x_0, a derivada de f em x_0 é denotada por $f'(x_0)$ e definida por

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Se f é derivável em todos os pontos do seu domínio dizemos que f é derivável.

Proposição 1.4 (Propriedades de Derivadas)**.** *Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções deriváveis no ponto de acumulação $x_0 \in A$ e seja $c \in \mathbb{R}$. Então,*

1. *$f + g$, cf, $f - g$, fg são deriváveis em x_0 e,*
   (a) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$,
   (b) $(cf)'(x_0) = c.f'(x_0)$,
   (c) $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$,
   (d) $(fg)'(x_0) = f'(x_0).g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
2. *Se $g(x_0) \neq 0$, então f/g é derivável em x_0 e*

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Proposição 1.5. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in A$. Então f é contínua em x_0.*

Proposição 1.6 (Regra de Cadeia)**.** *Para subconjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$, sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ funções com a condição que $f(A) \subseteq B$. Então, se f é derivável em $x_0 \in A$ e g é derivável em $f(x_0) \in B$, então a composição $g \circ f$ é derivável em x_0 e*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

Proposição 1.7. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ subconjuntos e $f : A \to B$ uma função invertível. Se f é derivável em $x_0 \in A$ com $f'(x_0) \neq 0$ e se $f^{-1} : B \to A$ é contínua no ponto $f(x_0)$, então f^{-1} é derivável em $f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Definição 1.8. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função no conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que f toma um **máximo local** em $x_0 \in A$ se para algum $\delta > 0$ e para todo $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$$f(x) \leq f(x_0).$$

As definições de mínimo local e extremo local são parecidas.

Teorema 1.9. *Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função real. Suponha que $x_0 \in A^\circ$ é um ponto interior de A e que f toma um extremo local em x_0. Se f é derivável em x_0, então $f'(x_0) = 0$.*

Teorema 1.10 (Teorema de Rolle)**.** *Seja $f \in C([a, b])$. Isso é dizer, f é continua no intervalo compacto $[a, b]$. Se f é derivável no interior (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Corolário 1.11 (Teorema de Valor Médio)**.** *Se f uma função que é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) = f(a) + f'(c)\,(b - a),$$

ou, equivalentemente,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Definição 1.12. Para $A \subseteq \mathbb{R}$, a função $f : A \to \mathbb{R}$ é **crescente** em A se para todo $a, b \in A$ com $a < b$, temos $f(a) \leq f(b)$. f é **estritamente crescente** se $a < b$ implica que $f(a) < f(b)$.

A definição de (estritamente) decrescente é parecida.

Corolário 1.13. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em I. Então, se para todo $x \in I$, temos*

1. *$f'(x) \geq 0$, então f é crescente;*
2. *$f'(x) > 0$, então f é estritamente crescente;*
3. *$f'(x) \leq 0$, então f é decrescente;*
4. *$f'(x) < 0$, então f é estritamente decrescente;*
5. *$f'(x) = 0$, então f é constante;*
6. *$f'(x) = g'(x)$, então $f - g$ é constante.*

Teorema 1.14 (Teorema de Valor Médio de Cauchy)**.** *Sejam f, g funções que são contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) e tais que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então, $g(a) \neq g(b)$ e existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

1.2 As Fórmulas de Taylor

Definição 1.15. Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I. Dizemos que f é **duas vezes derivável em** $x_0 \in I$ se a função $f' : I \to \mathbb{R}$ é derivável em x_0.

A **segunda derivada de** f em x_0 é $(f')'(x_0)$ e é denotada $f''(x_0)$.

Analogamente, podemos definir a terceira, etc, derivada. Dnotamos a n-éssima derivada por $f^{(n)}(x_0)$. Notamos que para definir $f^{(n)}(x_0)$, $f^{(n-1)}(x)$ deve ser definida em uma vizinhança aberta de x_0 e não apenas em x_0.

Definição 1.16. Se f é n-vezes derivável em I e se $f^{(n)} \in C(I)$, então dizemos qe f é **de classe** C^k em I. O conjunto de funções de classe C^k em I é denotado por $C^k(I)$. Se $f \in C^n(I)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que f é **suave** ou é **de classe** C^∞ escrevemos $f \in C^\infty(I)$.

Definição 1.17. Seja f uma função n-vezes derivável em x_0. O polinômio de Taylor de f de grau n em x_0 é

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n, \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Teorema 1.18 (Fórmula de Taylor, com resto de Peano)**.** *Seja f uma função $(n-1)$-vezes derivável no intervalo I e n-vezes derivável no ponto $x_0 \in I$. Então escrevendo $f(x_0 + h) = p_n(x_0 + h) + r(h)$, temos*

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Teorema 1.19. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz*

- *$f \in C^n([a,b])$, é n-vezes derivável e as derivadas são contínuas em $[a,b]$;*
- *f é $(n+1)$-vezes derivável em (a,b).*

Seja

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)\,(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x - a)^n,$$

o n-éssimo polinômio de Taylor de f no ponto $x = a$. Então, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) = p_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\,(b - a)^{n+1}.$$

Proposição 1.20 (l'Hôpital de tipo 0/0)**.** *Sejam f e g funções deriváveis em (a,b) e suponha que*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0.$$

Suponha que $g'(x)$ em (a,b) e que o limite $\lim_{x \to a^+}(f'(x)/g'(x))$ existe e é finito. Então, o limite $\lim_{x \to a^+}(f(x)/g(x))$ existe e vale

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.3 Funções Convexas

Definição 1.21 (Função Convexa)**.** Para $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **convexa** se para todo $a, x, b \in I$ com $a < x < b$ temos

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a),$$

ou, equivalentemente,

$$f(x) \leq f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - b).$$

Isso é: o valor da função $f(x)$ é sempre menor ou igual ao valor da função que determina a linha secante em $\mathbb{R}^2$ entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ no gráfico de f.

Teorema 1.22. *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa, então para todo $c \in I^\circ$, então existem as derivadas laterais*

$$\begin{aligned} f'_+(c) &= \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}, \\ f'_-(c) &= \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}. \end{aligned}$$

Corolário 1.23. *Uma função convexa $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua em todo ponto no interior de I.*

Teorema 1.24. *Supomos que f é derivável. As condições seguintes são equivalentes para uma função $f : I \to \mathbb{R}$ derivável em I:*

1. *f é convexa;*
2. *a derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente em I;*
3. *para quaisquer $a, x \in I$, temos*

   $$f(x) \geq f(a) + f'(a)\,(x - a).$$

   Ou seja, o gráfico $y = f(x)$ fica por cima da linha tangente $y = f(a) + f'(a)\,(x - a)$ ao gráfico em $(a, f(a))$.

Corolário 1.25. *Se f é convexa e derivável em I e $f'(a) = 0$, para $a \in I$, então a é um ponto mínimo absoluto de f. Isso é dizer:*

$$f(a) \leq f(x), \qquad \forall x \in I.$$

Corolário 1.26. *A função duas vezes diferenciável em I $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa se e somente se $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Definição 1.27. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **côncava** se $-f$ é convexa.

Definição 1.28. A função $f : I \to \mathbb{R}$ é **estritamente convexa** se para todo $a, x, b \in I$ com $a < x < b$, temos

$$f(x) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,(x - a).$$

Teorema 1.29 (Desigualdade de Jensen)**.** *Sejam* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função convexa, pontos* $a_1, \ldots, a_n \in I$ *e pesos* $t_1, \ldots, t_n \in [0, 1]$ *com* $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$*. Então, temos*

$$f(t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + \cdots + t_n f(a_n).$$

2 Próxima Seção