Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — Gabarito da Prova Final Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Quimica — **Data**: 05/07/2011

---

1. (2,5 p) Considere a equação de onda modificada

$$u_{tt} + 2bu_t + b^2u - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{1}$$

onde $b > 0$ é uma constante. Com condições de contorno:

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \qquad t > 0,$$

e condições iniciais:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < L.$$

Encontre o deslocamento $u(x,t)$.

Resposta: Aplicando a técnica de separação de variáveis, vamos supor que $u(x,t)$ é solução do problema acima talque

$$u(x,t) = F(x)G(t) \qquad \text{para todo} \quad (x,t) \quad \text{no domínio de} \quad u, \tag{2}$$

A equação diferencial fornece

$$FG'' + 2bFG' + b^2FG - F''G = 0.$$

Rearranjando os termos obtemos

$$\frac{G'' + 2bG' + b^2G}{G} = \frac{F''}{F} = -\lambda,$$

onde λ é uma constante, pois o primeiro termo dessa equação só depende de t, o segundo só depende de x e como desejamos que sejam iguais para todo $x \in (0,L)$ e $t > 0$ concluimos que independe de x e t.

Assim mostramos que a equação (1) é equivalente as equações diferenciais

$$G'' + 2bG' + b^2G + \lambda G = 0, \qquad F'' + \lambda F = 0.$$

Das condições de contorno temos que $F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e das condições iniciais temos que $F(x)G'(0) = 0$ para todo $0 \leq x \leq L$. Como não nos interessam soluções nulas, temos que $F(0) = F(L) = 0$ e $G'(0) = 0$.

Consideremos o PVC

$$\begin{cases} F'' + \lambda F = 0, \\ F(0) = F(L) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Como é conhecido os autovalores e as autofunções do problema (3) são

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \geq 1, \tag{4}$$

$$F_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n \geq 1. \tag{5}$$

Com estes auto-valores (4) podemos usar a EDO em t para obter as soluções correspondentes $G_n(t)$. Nesse objetivo, consideremos a equação

$$G'' + 2bG' + \left[b^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] G = 0, \quad x > 0. \tag{6}$$

A equação característica correspondente $r^2 + 2br + \left[b^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right] = 0$ tem as seguintes raízes

$$r = -b \pm \frac{n\pi}{L}\, i. \tag{7}$$

A solução geral tem a forma

$$G(t) = e^{-bt}\big(A\cos\frac{n\pi t}{L} + B\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\big).$$

Como

$$G'(t) = -be^{-bt}\big(A\cos\frac{n\pi t}{L} + B\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\big) + e^{-bt}\frac{n\pi}{L}\big(-A\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L} + B\cos\frac{n\pi t}{L}\big),$$

da condição de contorno $G'(0) = 0$ temos que

$$\begin{aligned} 0 = G'(0) &= -be^{-b0}\big(A\cos 0 + B\,\mathrm{sen}\,0\big) + e^{-b0}\frac{n\pi}{L}\big(-A\,\mathrm{sen}\,0 + B\cos 0\big) \\ &= (-bA + \frac{n\pi}{L}B) \quad \text{e portanto} \quad A = \frac{n\pi}{bL}B. \end{aligned}$$

Aplicando o Principio de Superposição temos que série de funções que é candidata a solução é da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} e^{-bt}\left(\frac{n\pi}{bL}\cos\frac{n\pi t}{L} + \mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\right). \tag{8}$$

Analisando a condição inicial para determinar os coeficientes c_n, temos

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{n\pi}{bL}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L} \qquad \text{se } 0 < x < L.$$

Como temos uma série de Fourier de senos, calculamos os coeficientes c_n da seguinte maneira

$$c_n\frac{n\pi}{bL} = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad \text{e portanto} \quad c_n = \frac{2b}{n\pi}\int_0^L f(x)\cdot\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

2. (2,5 p) Encontre a solução $u(\theta,r)$ da equação de Laplace

$$r^2\,u_{rr} + r\,u_r + u_{\theta\theta} = 0 \tag{9}$$

na região exterior do disco $D = \{(\theta,r)\colon 0 \le \theta < 2\pi \text{ e } 0 \le r \le a\}$, que satisfaça a condição de contorno sobre o círculo

$$u(\theta,a) = \mathrm{sen}\,\theta, \qquad 0 \le \theta < 2\pi. \tag{10}$$

Suponha que $u(\theta,r)$ é limitada quando $r \to \infty$.

Resposta: Por separação de variáveis, procuramos soluções (que sejam combinações lineares finitas ou infinitas de funções) da forma $u(\theta,r) = \Theta(\theta)R(r)$. Substituindo na equação de Laplace, obtemos

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

A equação

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0, \tag{11}$$

tem como solução geral

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} A\theta + B & \text{se } \lambda = 0, \\ A\cosh(\omega\theta) + B\,\mathrm{senh}(\omega\theta) & \text{se } \lambda = -\omega^2 < 0, \\ A\cos(\omega\theta) + B\,\mathrm{sen}(\omega\theta) & \text{se } \lambda = \omega^2 > 0. \end{cases}$$

Como estamos considerando coordenadas polares e procurando uma solução bem definida fora do disco D, a função $\Theta(\theta)$ deve ser necessariamente periódica de periódo 2π. Portanto, $\lambda < 0$ não fornece soluções periódicas não nulas. Para $\lambda = 0$ somente podemos considerar soluções constantes. Para $\lambda > 0$ devemos ter necessariamente $\omega \in \mathbb{N}$. Concluimos então que (11) para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ com $\lambda_n = n^2$ tem as soluções do tipo

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos(n\theta) + B_n\,\mathrm{sen}(n\theta),$$

com constantes arbitrárias A_n e B_n. Assim, consideramos para cada n a solução correspondente da equação de Euler

$$r^2 R'' + rR' - n^2 R = 0.$$

A equação indicial correspondente é $s(s-1) + s - n^2 = s^2 - n^2 = 0$ cujas raízes são $s_1 = n$ e $s_2 = -n$. Portanto, para cada n temos a solução geral dessa equação de Euler

$$R_n(r) = \alpha_n r^n + \beta_n r^{-n},$$

com constantes arbitrarias α_n e β_n. Assim temos que considerar as soluções gerais

$$u_n(\theta, r) = \Theta_n(\theta)R(r) = (\alpha_n r^n + \beta_n r^{-n})(A_n \cos(n\theta) + B_n\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Como só queremos soluções limitadas na região fora do disco D, devemos descartar os termos r^n (isto é, assumir que $\alpha_n = 0$), pois essos termos são ilimitados no intervalo $r \in (a, \infty)$. Portanto, a solução geral da equação de Laplace será uma superposição das soluções fundamentais obtidas e, portanto, da forma

$$u(\theta, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^{-n}(A_n \cos(n\theta) + B_n\,\mathrm{sen}(n\theta)).$$

Nosso próximo passo será encontrar os coeficientes $\beta_n r^{-n} A_n$ e $\beta_n r^{-n} B_n$. Considerando a condição de contorno (10), temos

$$\mathrm{sen}\,\theta = u(\theta, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n a^{-n}(A_n \cos(n\theta) + B_n\,\mathrm{sen}(n\theta)),$$

Porém como $\mathrm{sen}\,\theta$ é continua em $0 \le \theta < 2\pi$, temos que

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n}(a_n \cos(n\theta) + b_n\,\mathrm{sen}(n\theta)) \quad \text{se } \theta \in [0, 2\pi).$$

como $a_0 = 2\beta_0 A_0$, $a_n = \beta_n A_n$ e $b_n = \beta_n B_n$ para $n \ge 1$ são constantes arbitrarias. Concluimos então por comparação dos coeficientes que $0 = a_0 = a_1 = a_2 = \ldots$, $b_1 = a$, $0 = b_2 = b_3 = \ldots$. A solução portanto é

$$u(\theta, r) = \frac{a}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Finalmente, podemos verificar que $u(\theta, r)$ realmente é a solução: Ela é limitada se $r \ge a$, satisfaz

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = r^2 \frac{2a}{r^3}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\frac{-a}{r^2}\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{a}{r}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{1}{r^3}\left(2ar^2 - ar^2 - ar^2\right)\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

e

$$u(\theta, a) = \frac{a}{a}\,\mathrm{sen}\,\theta = \mathrm{sen}\,\theta.$$

3. (3,0 p) Resolva as seguintes questões:

   (a) Encontre a $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ onde
   $(0,8\,p)(i)$ $F(s) = \dfrac{7se^{4s}}{s^2-6s+5}$, $(0,7\,p)(ii)$ $F(s) = \dfrac{1}{s^3-4s^2+5s}$.

   (b) Encontre a transformada de Laplace de
   (i) $f(t) = |1-t^2|$, (ii) $f(t) = 2tu_1(t) - 3t\delta(t-2)$.

Resposta: 3 (ai) Queremos mostrar que não existe a transformada inversa de $F(s)$. Para isto procederemos pelo absurdo. Suponhamos que existe a transformada de Laplace inversa de $F(s)$, isto é, existe uma função ou classe $f(t)$ continua por partes em $[0,\infty)$ e de ordem exponêncial quando $t \to \infty$, talque

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

Por outra parte, como consequència do teorema de existència da transformada de Laplace é simples verficar a seguinte propriedade: toda função $f(t)$ continua por partes em $[0,\infty)$ e de ordem exponêncial quando $t \to \infty$, verifica que

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = 0.$$

Porem podemos observa que

$$\lim_{s \to \infty} F(s) = \lim_{s \to \infty} \frac{7se^{4s}}{s^2-6s+5} = \infty,$$

O qual é uma contradição, o que mostra a nossa afirmação.

3 (aii) Rescrevendo e completando o quadrado temos $s^3-4s^2+5s = s\big((s-2)^2+1\big)$. Decompondo em frações parciais temos

$$\frac{1}{s\big((s-2)^2+1\big)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s-2)^2+1},$$

encontrando as constantes resolvemos o problema. Outra maneira de ver, seria aplicando propriedades da transformada de uma integral. Seja

$$F(s) = \frac{1}{s\big((s-2)^2+1\big)}$$

Queremos achar $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{F(s)}{s}\}$, isto é :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{F(s)}{s}\} = \quad & \textstyle\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}\,d\mu,\\
& \textstyle\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s-2)^2+1}\}\,d\mu,\\
& \textstyle\int_0^t e^{2\mu}\cos\mu\,d\mu,\\
& \tfrac{1}{2}\,e^{2\mu}\cos\mu\Big|_0^t + \tfrac{1}{2}\textstyle\int_0^t e^{2\mu}\operatorname{sen}\mu\,d\mu,\\
& -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}e^{2t}\cos t + \tfrac{1}{4}e^{2t}\operatorname{sen} t - \tfrac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\tfrac{F(s)}{s}\}
\end{aligned}$$

Concluimos então que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s\big((s-2)^2+1\big)}\right\} = -\frac{2}{5} - \frac{2}{5}e^{2t}\cos t + \frac{1}{5}e^{2t}\operatorname{sen} t.$$

3 (bi) Seja $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(t)$. Sendo

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{se } 0 \le t < 1, \\ -(1 - t^2) & \text{se } t \ge 1, \end{cases}$$

podemos rescrever $f(t)$ usando a função degrau

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - t^2 + \big(-(1-t^2) - (1-t^2) \big) u_1(t) \\ &= 1 - t^2 - 2\,(1-t^2) u_1(t). \end{aligned}$$

Como $t^2 - 1 = (t-1)^2 + 2(t-1)$, temos

$$f(t) = \; 1 - t^2 + 2(t-1)^2 u_1(t) + 4(t-1) u_1(t).$$

Lembremos que $\mathcal{L}\{t^2\} = 2s^{-3}$, $\mathcal{L}\{t\} = s^{-2}$, $\mathcal{L}\{1\} = s^{-1}$, e portanto concluimos que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \; \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + 4\frac{e^{-s}}{s^3} + 4\frac{e^{-s}}{s^2}$$

3 (bii) Como

$$2t\, u_1(t) - 3t\,\delta(t-2) = 2u_1(t) \cdot (t-1) + 2u_1(t) - 3t\,\delta(t-2)$$

e

$$\mathcal{L}\{t\,\delta(t-2)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\delta(t-2)\} = -\frac{d}{ds}e^{-2s} = 2e^{-2s}$$

temos

$$\mathcal{L}\left\{2t\, u_1(t) - 3t\,\delta(t-2)\right\} = 2e^{-s}s^{-2} + 2e^{-s}s^{-1} - 6e^{-2s}.$$

4. (2,0 p) Obtenha uma representação em série de potências a função

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Calcule o raio de convergência da série obtida. Verifique que

$$\ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$$

Resposta: Observemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{absolutamente convergente em} \quad |x| < 1$$

nesse caso podemos obter

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \text{abssolutamente convergente em} \quad |x| < 1$$

Como a função $\frac{1}{1-x^2}$ é integrável em $|x| < 1$. Integrando de 0 a t com $|t| < 1$, obtemos que

$$\int_0^t \frac{dx}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t x^{2n}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}. \tag{12}$$

Convergente em $|t| < 1$m com raio de convergència $r = 1$. Agora observemos que

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} \tag{13}$$

Integrando (13) e usando a definição de $\ln(1-t)$ e $\ln(1+t)$, obtemos

$$\int_0^t \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(1-t) + \frac{1}{2}\ln(1+t) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t},$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}$$

convergente. Tomando $t = 1/2$ mostramos a fórmula pedida.

Professores: Carlos Ferraris, Katrin Gelfert, I Shih, Pedro Gamboa, Xavier Carvajal.