Gabarito da Prova Final Unificada de Cálculo IV – Dezembro de 2010

1ª Questão: (1.5 pts)
Dentre as três séries alternadas abaixo, diga se convergem absolutamente, se convergem condicionalmente ou se divergem. Justifique sua resposta.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10+n}{2+n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2}.$$

Solução: (a) A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+3}$ é condicionalmente convergente. De fato, como

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \cdots \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3} = 0,$$

a série alternada converge. Por outro lado, como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{1/(n+3)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n} = 1,$$

temos pelo teste da comparação que as séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+3} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

têm o mesmo comportamento, isto é, divergem.
(b) A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10+n}{2+n}$ diverge pois o termo geral não tende a zero. De fato,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10+n}{2+n} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{10+n}{2+n} \quad \text{não existe.}$$

(c) A série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2}$ é absolutamente convergente. De fato, como a função $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ é decrescente para $x > \sqrt{e}$ e tende a zero quando $x \to +\infty$, temos, pelo teste da integral,

$$\int_1^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \int_0^{\infty} ye^{-y}\,dy = 1,$$

onde a segunda intgral é obtida fazendo a substituição $y = \ln(x)$ e calculada por partes.

2ª Questão: (1.5 pts)
Sabendo que a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

(a) determiner a série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ da função $g(x) = xe^{x^2}$ e calcule seu raio de convergência;
(b) determine a derivada de ordem 51 da função $g(x)$ no ponto $x_0 = 0$, isto é, determine $g^{(51)}(0)$.
(c) use os resultados anteriores para determinar o limite da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n e^{2n}}{n!}$$

Solução: (a) Para cada valor de $u \in \mathbb{R}$ temos $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{u^n}{n!}$. Em particular, para $u = x^2$, temos

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad \Rightarrow \quad xe^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$$

Calculando o raio de convergência R:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\,x|^{2n+3}}{(n+1)!} \frac{n!}{|\,x|^{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\,x|^2}{n+1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Logo, $R = \infty$ e a série converge qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

(b) Pela definição da série de Taylor, sabemos que $g^{(51)}(0)/51!$ é o coeficiente do termo que corresponde à potência x^{51} na série. Logo,

$$\frac{g^{(51)}(0)}{51!} = \frac{1}{25!} \quad \Rightarrow \quad g^{(51)}(0) = \frac{51!}{25!} = 26 \times 27 \times \cdots \times 51.$$

(c) Como a série de Taylor de $f(x)$ converge para e^x, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, temos, (tomando $x = 3e^2$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n e^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3e^2)^n}{n!} = e^{3e^2}.$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n e^{2n}}{n!} = e^{3e^2} - 1.$$

3ª Questão: (2.5 pts)

Use a Transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial:

$$y' + y = h(t), \quad y(0) = 0,$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & \text{se } 0 \le t \le \pi, \\ 0 & \text{se } t > \pi. \end{cases}$$

Solução: Seja $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$. Então, aplicando a Transformada de Laplace nos dois lados da equação, obtemos

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = \mathcal{L}\{h\}(s) \quad \Rightarrow \quad (s+1)Y(s) = \mathcal{L}\{h\}(s).$$

Observando que $\operatorname{sen}(t) = -\operatorname{sen}(t-\pi)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$h(t) = \operatorname{sen}(t) - u_\pi(t)\operatorname{sen}(t-\pi), \quad \forall t \ge 0.$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1},$$

de modo que

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} - \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s+1)}$$

Decompondo em frações parciais,

$$\frac{1}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-s+1}{s^2+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+1}\right).$$

Logo,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)(s+1)}\right\} = \frac{\operatorname{sen}(t) - \cos(t) + e^{-t}}{2}$$

e consequentemente,

$$y(t) = \frac{\operatorname{sen}(t) - \cos(t) + e^{-t}}{2} - u_\pi(t)\left(\frac{\operatorname{sen}(t-\pi) - \cos(t-\pi) + e^{-(t-\pi)}}{2}\right).$$

Portanto,

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t) - \cos(t) + e^{-t}}{2} & \text{se } 0 \le t \le \pi, \\ \operatorname{sen}(t) - \cos(t) + \frac{1}{2}e^{-t}\big[1 - e^{\pi}\big] & \text{se } t \ge \pi. \end{cases}$$

4ª Questão: (2.5 pts)

Use o método de separação de variáveis para calcular a solução (limitada) do problema de contorno para a equação de Laplace (em coordenadas polares) em $D = \big\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 > 1\big\}$ (exterior do círculo unitário):

$$\begin{cases} r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0 & \text{em } D, \\ u(1,\theta) = \theta, & 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Solução: Por separação de variáveis, devemos procurar soluções (que sejam combinações lineares finitas ou infinitas de funções) da forma $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$. Substituindo na equação, obtemos

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

A segunda equação tem como sulução geral:

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} a\theta + b & \text{se } \lambda = 0, \\ a\cosh(\omega\theta) + b\operatorname{senh}(\omega\theta) & \text{se } \lambda = -\omega^2 < 0, \\ a\cos(\omega\theta) + b\operatorname{sen}(\omega\theta) & \text{se } \lambda = \omega^2 > 0, \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Como estamos considerando coordenadas polares, a função Θ deve ser necessariamente periódica de período 2π. Portanto, $\lambda < 0$ não fornece soluções periódicas não nulas. Para $\lambda = 0$ somente podemos considerar soluções constantes e para $\lambda > 0$ devemos ter necessariamente $\omega \in \mathbb{N}$. Portanto, devemos considerar, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\lambda_n = n^2$ e as soluções do tipo

$$\Theta_n(\theta) = a_n\cos(n\theta) + b_n\operatorname{sen}(n\theta).$$

Por outro lado, para $\lambda_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a equação para $R(r)$ toma a forma

$$r^2R''(r) + rR'(r) - n^2R(r) = 0.$$

Esta é uma equação de Euler, cuja indicial é $r(r-1)+r-n^2=0$, tendo como raízes $r_1=n$ e $r_2=-n$. Portanto, para cada $n\in\mathbb{N}$, temos a solução geral da equação de Euler,

$$R_n(r)=\alpha_n r^n+\beta_n r^{-n},$$

onde α_n e β_n são constantes arbitrárias.
Os argumentos anteriores nos levam a considerar, para cada $n=0,1,2\ldots$, as soluções

$$u_n(r,\theta)=R_n(r)\Theta_n(\theta)=\big(\alpha_n r^n+\beta_n r^{-n}\big)\big(a_n\cos(n\theta)+b_n\operatorname{sen}(n\theta)\big)$$

Como só queremos soluções limitadas em D, devemos descartar as parcelas com potência r^n, $n=1,2,\ldots$, pois essas são ilimitadas no intervalo $r>1$. Logo a solução geral da equação de Laplace em D será da forma

$$u(r,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\Big(A_n\cos(n\theta)+B_n\operatorname{sen}(n\theta)\Big),$$

onde $A_0=2\beta_0a_0$, $A_n=\beta_na_n$ e $B_n=\beta_nb_n$, $n=1,2,\ldots$, são constantes arbitrárias.
Considerando agora a condição de contorno (em $r=1$), temos

$$u(1,\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos(n\theta)+B_n\operatorname{sen}(n\theta)\Big)=\theta,\quad \theta\in[0,2\pi).$$

Sabemos que uma condição necessária para que a igualdade acima se verifique é que A_n e B_n sejam os coeficientes de Fourier da função periódica de período 2π tal que $f(\theta)=\theta$ para $\theta\in[0,2\pi)$. Assim,

$$\begin{aligned}A_0&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta=2\pi,\\ A_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta\cos(n\theta)\,d\theta=0,\\ B_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta\operatorname{sen}(n\theta)\,d\theta=-\frac{2}{n}.\end{aligned}$$

Portanto, a solução procurada é:

$$\boxed{u(r,\theta)=\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{-n}}{n}\operatorname{sen}(n\theta).}$$

5ª Questão: (2.0 pts)

Considere a equação de Laguerre: $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0.$
(a) Mostre que $x=0$ *é ponto singular regular;*
(b) Determine a equação indicial e suas raízes;
(c) Determine a relação de recorrência e uma solução para $x>0$.
(d) Mostre que se $\lambda=n\in\mathbb{N}$, *uma das soluções se reduz a um polinômio.*

Solução: (a) Dividindo os dois lados da equação por x obtemos

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0,$$

onde

$$p(x)=\frac{1-x}{x},\quad q(x)=\frac{\lambda}{x}.$$

Como

$$\lim_{x\to 0} xp(x) = \lim_{x\to 0}(1-x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} x^2q(x) = \lim_{x\to 0} \lambda x = 0,$$

temos que $x = 0$ é, por definição, um ponto singular regular para a equação.

(b) A equação indicial é, por definição, $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$, onde p_0 e q_0 são os limites calculados acima, isto é, $p_0 = 1$ e $q_0 = 0$. Portanto, para a equação de Laguerre, a indicial é $r^2 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 0$.

(c) Pelo Teorema de Frobenius, uma das soluções será sempre da forma

$$y(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x > 0,$$

onde r_1 é a maior das raízes da equação indicial. No caso, $r_1 = 0$, de modo que temos solução na forma de série de potências:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Substituindo na equação, obtemos

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - n) a_n x^n = 0.$$

Juntando os termos de mesma potência, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+1)^2 a_{k+1} + (\lambda - k)a_k\Big]x^k = 0.$$

Temos assim a fórmula de recorrência para os coeficientes a_k, a saber,

$$a_{k+1} = \frac{k-\lambda}{(k+1)^2}a_k, \quad k = 0, 1, 2\ldots$$

Explicitando, temos, para $a_0 \in \mathbb{R}$ constante arbitrária:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\lambda a_0,\\
a_2 &= \frac{1-\lambda}{2^2}a_1 = -\frac{\lambda(1-\lambda)}{2^2}a_0,\\
a_3 &= \frac{2-\lambda}{3^2}a_2 = -\frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)}{2^2 3^2}a_0,\\
&\vdots \qquad \vdots\\
a_{n+1} &= \frac{n-\lambda}{(n+1)^2}a_n = -\frac{\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)\cdots(n-\lambda)}{(n!)^2}a_0,
\end{aligned}$$

A solução procurada é

$$y(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right],$$

onde os coeficientes a_n são os calculados acima.

(d) Se $\lambda = n_0 \in \mathbb{N}$, então decorre da fórmula de recorrência acima que

$$a_{n_0+1} = \frac{n_0 - n_0}{(n_0+1)^2}a_{n_0} = 0.$$

Logo a solução será o polinômio de grau n_0

$$y(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{n_0} a_n x^n\right].$$