Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — Prova Final Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias 1^o Sem/2011

Código: MAC 248 — **Data**: 05/07/2011

---

1. (2,5 p) Considere a equação de onda modificada
$$u_{tt} + 2bu_t + b^2 u - u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{1}$$
onde $b > 0$ é uma constante. Com condições de contorno:
$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \qquad t > 0,$$
e condições iniciais:
$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < L.$$
Encontre o deslocamento $u(x,t)$.

2. (2,5 p) Encontre a solução $u(\theta, r)$ da equação de Laplace :
$$r^2\, u_{rr} + r\, u_r + u_{\theta\theta} = 0 \qquad 0 < \theta < 2\pi \quad a < r, \tag{2}$$
na região exterior do disco $D = \{(\theta, r);\ 0 \leq \theta < 2\pi \text{ e } 0 \leq r \leq a\}$, que satisfaça a condição de contorno sobre o círculo:
$$u(\theta, a) = \operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \leq \theta < 2\pi, \tag{3}$$
Suponha que $u(\theta, r)$ è limitada quando $r \to \infty$.

3. (3,0 p) Resolva as seguintes questões
   (a) Encontre a $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ onde
   $$(0,8\,p)(a)\ F(s) = \frac{7se^{4s}}{s^2 - 6s + 5}, \qquad (0,7\,p)(b)\ F(s) = \frac{1}{s^3 - 4s^2 + 5s}.$$
   (b) Encontre a transformada de Laplace de
   $$(a)\ f(t) = |1 - t^2|, \qquad (b)\ f(t) = 2tu_1(t) - 3t\delta(t-2).$$

4. (2,0 p) Obtenha uma representação em séries de potências da função
$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$
Calcule o raio de convergência da série obtida. Verifique que
$$\ln 3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$$

ver fórmulas **NO VERSO**

Fórmulas :.

1. Suponha que $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) \quad \text{se} \quad s > \alpha$

   - $\mathcal{L}\{u_a(t) \cdot g(t-a)\} = e^{-as}G(s)$
   - $\mathcal{L}\left\{e^{bt}g(t)\right\} = G(s-b) \quad \text{se } s > \alpha + b$
   - $\displaystyle\int_0^{\infty} \delta(t-a)h(t)\,dt \ = \ h(a) \quad \text{se} \quad h(t)$ for contínua em $[0, \infty[$.
   - $\mathcal{L}\{\displaystyle\int_0^t g(\xi)\,d\xi\} = \dfrac{G(s)}{s}$
   - $\mathcal{L}\{\,t\,g(t)\,\} = -\dfrac{d}{ds}G(s)$
   - $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \quad s > 0$
   - $\ln(1-t) = -\displaystyle\int_0^t \frac{dx}{1-x} \qquad |t| < 1.$

2. A série de Fourier de $f(x)$ é dada

$$s(x; f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}x), \tag{4}$$

3. Integração por partes

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \ f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{5}$$

Professores: Carlos Ferraris, I Shih, Katrin Gelfert, Pedro Gamboa, Xavier Carvajal.