INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prova Final Unificada de Cálculo IV – MAC 248
Escola Politécnica / Escola de Química
08/12/2010

1ª Questão: (1.5 pts)
Dentre as três séries alternadas abaixo, diga se convergem absolutamente, se convergem condicionalmente ou se divergem. Justifique suas respostas.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10+n}{2+n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^2}.$$

2ª Questão: (1.5 pts)
Sabendo que a série de Taylor de $f(x) = e^x$ em torno de $x_0 = 0$ é dada por

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},$$

(a) determiner a série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ da função $g(x) = xe^{x^2}$ e calcule seu raio de convergência;
(b) determine a derivada de ordem 51 da função $g(x) = xe^{x^2}$ no ponto $x_0 = 0$, isto é, determine $g^{(51)}(0)$;
(c) use os resultados anteriores para determinar o limite da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n e^{2n}}{n!}.$$

3ª Questão: (2.5 pts)
Use a Transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial:

$$y' + y = h(t), \quad y(0) = 0,$$

onde

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & \text{se } 0 \le t \le \pi, \\ 0 & \text{se } t > \pi. \end{cases}$$

4ª Questão: (2.5 pts)
Use o método de separação de variáveis para calcular a solução (limitada) do problema de contorno para a equação de Laplace no exterior do círculo unitário centrado na origem, isto é, usando coordenadas polares:

$$\begin{cases} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 & (r,\theta) \in D = \big\{(r,\theta)\,|\,0 \le \theta < 2\pi,\, r > 1\big\}, \\ \qquad u(1,\theta) = \theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

5ª Questão: (2.0 pts)
Considere a equação de Laguerre: $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$.
(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular;
(b) Determine a equação indicial e suas raízes;
(c) Determine a relação de recorrência e uma solução para $x > 0$.
(d) Mostre que se $\lambda = n \in \mathbb{N}$, uma das soluções se reduz a um polinômio.

Formulário no verso

Formulário

1. Tabela básica de transformadas de Laplace: denotando $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$:

- $\mathcal{L}\{u_c(t)g(t-c)\} = e^{-cs}G(s)$
- $\mathcal{L}\{e^{ct}g(t)\} = G(s-c)$
- $\mathcal{L}\{\text{sen}(at)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$
- $\mathcal{L}\{\text{senh}(at)\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$
- $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$
- $\mathcal{L}\{\delta(t-c)f(t)\} = e^{-cs}f(c)$
- $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)G(s)$ onde $(f*g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$

2. Integração por partes:

$$\int x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = \frac{L}{n\pi}x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + C$$

$$\int x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = -\frac{L}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + C$$

2. Série de Taylor:

Para uma função $f(x)$ que possui derivada de todas as ordens, definimos a série de Taylor em torno de x_0 por:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

3. Laplaciano em coordenadas polares:

$$u_{xx} + u_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$$