Questão 1: (3.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Verifique se a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ é absolutamente convergente, condicionalmente convergente ou divergente.

(b) (1.5 ponto) Encontre a série de Taylor da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases},$$

em torno do ponto $x = 0$, e o seu respectivo raio de convergencia.

(c) (0.5 ponto) Utilizando a série do item (b) calcule $f^{(50)}(0)$ (isto é, a derivada de ordem 50 da função $f(x)$ no ponto $x = 0$).

Questão 2: (1.5 ponto)

Considere a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1, \\ 2 - x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

e suponha que f está definida fora do intervalo $0 \leq x < 2$ de modo a satisfazer $f(x+2) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(a) (0.5 ponto) Esboce o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[-4, 2]$.

(b) (1.0 ponto) Encontre a série de Fourier de $f(x)$.

Questão 3: (2.5 pontos)

Utilizando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = u_3(t)\,e^{t-2}, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 2, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 2 \\ u_t(x,0) = 5 + \cos(4\pi x), & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) (2.0 pontos) Utilizando o Método de Separação de Variáveis, obtenha as equações diferencias ordinárias nas variáveis x e t e as resolva, detalhando todas as etapas.

(b) (0.5 ponto) Encontre a solução em série que verifica a equação e as condições de fronteira.

(c) (0.5 ponto) Analisando as condições iniciais do (PVIF) obtenha a solução do problema dado.

LEMBRETES NO VERSO

1. Integrais.
   - $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{sen}(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$
   - $\displaystyle\int x\,\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\,\mathrm{sen}(ax)$
2. Tabela resumo para EDO de 2ª ordem com coeficientes constantes: $a\,y''(x) + b\,y'(x) + c\,y(x) = 0$
   - $r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1\,e^{r_1 x} + c_2\,e^{r_2 x}$
   - $r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 = r_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = \big(c_1 + c_2\,x\big)\,e^{r_1 x}$
   - $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{\alpha x}\big(c_1\cos(\beta x) + c_2\,\mathrm{sen}(\beta x)\big)$
3. Tabela básica de Transformada de Laplace
   - $\mathcal{L}\left\{u_c(t)\cdot g(t-c)\right\} = e^{-cs}G(s)$
   - $\mathcal{L}\left\{e^{ct}g(t)\right\} = G(s-c)$
   - $\mathcal{L}\left\{\delta(t-c)\right\} = e^{-cs}$
   - $\displaystyle\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s)\cdot G(s)$
   - $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(s)$
   - $\mathcal{L}\left\{(-t)^n f(t)\right\} = F^{(n)}(s)$
4. Séries de Taylor
   - $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

 Boa prova!