Questão 1: (2.0 pontos)

(a) (1.0 ponto) Obtenha os cinco primeiros termos da série de Taylor da função $f(x) = \cos x$ em torno de $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) (1.0 ponto) Classifique a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+2n+1} \tag{2}$$

em absolutamente convergente, divergente ou condicionalmente convergente. Justifique as suas afirmações.

Questão 2: (2.0 pontos)

Considere o problema de valor inicial dado abaixo:

$$\begin{cases} (x^2+1)\ y''(x) + 6xy'(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Supondo que $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ resolva o que se pede:

(a) (1.0 ponto) Determine a relação de recorrência ;

(b) (1.0 ponto) Encontre a solução em série de potências para o problema de valor inicial dado.

Questão 3: (2.0 pontos)

Resolva o problema da valor inicial dado abaixo utilizando a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y(t) = f(t) \\ y(0) = 1; \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{onde} \qquad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1, \\ t-1, & t \geqslant 1. \end{cases}$$

Questão 4: (4.0 pontos)

Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 9u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(3,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(x,0) = g(x), \quad 0 < x < 3. \end{cases} \qquad \text{com} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 3x, & 1 \leqslant x < 2 \\ 0, & 2 \leqslant x < 3. \end{cases}$$

(a) (1.5 ponto) Ache a extensão ímpar e periódica de período 6 da função $g(x)$. Faça seu gráfico no intervalo $[-6, 6]$ e determine a Série de Fourier desta extensão.

(b) (0.5 ponto) Supondo que a solução é da forma $u(x,t) = F(x)G(t)$ (ou, se desejar, $u(x,t) = X(x)T(t)$), determine as duas equações diferenciais ordinárias associadas;

(c) (1.0 ponto) Obtenha os autovalores e respectivas autofunções do problema de valor de contorno correspondente a $F(x)$ (ou $X(x)$);

(d) (1.0 ponto) Analisando as condições iniciais do PVIF, obtenha a solução do problema dado.

Observação: Justifique as respostas de todos os itens

Aviso: A prova de segunda chamada será realizada na próxima quinta-feira, dia 09/07/2009, às 17 horas. Poderão fazê-la apenas os alunos que faltaram alguma prova e alcançarem média 3 ou mais.

INSTRUÇÕES E TABELA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE NO VERSO

Regras:

- Duração da prova: 150 minutos
- Não é permitido (nem necessário) o uso de calculadoras, consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala por qualquer motivo.
- Mantenham os celulares e similares desligados e dentro das bolsas/mochilas. As bolsas e mochilas deverão ser guardadas na mesa do professor ou junto ao quadro em local afastado do aluno.

Formulário: Tabela resumo para EDO de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{array}{rcl} r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 \neq r_2 & \Longrightarrow & H(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 = r_2 & \Longrightarrow & H(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} \\ r_1 = \alpha + \beta i,\, r_2 = \alpha - \beta i & \Longrightarrow & H(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x]. \end{array}$$

Tabela Básica de Transformadas de Laplace

- $\mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$, com n sendo um inteiro
- $\mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
- $\mathcal{L}\{\operatorname{senh} at\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$, $s > |a|$
- $\mathcal{L}\{\cosh at\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$, $s > |a|$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at} \operatorname{sen} bt)\right\} = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at} \cos bt\right\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
- $\mathcal{L}\left\{e^{at} t^n\right\} = \dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$, com n sendo um inteiro
- $\mathcal{L}\{u_c(t).g(t-c)\} = e^{-cs}G(s)$, sendo $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, $s > c$
- $\mathcal{L}\left\{e^{ct} g(t)\right\} = G(s-c)$, sendo $G(s-c) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s-c)$, $s > c$