Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — 2ª Prova Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias 2º Sem/2011

Código: MAC 248 — **Data**: 24/11/2011

Questão 1. (3,5 pontos). Nos itens abaixo justifique todas as suas respostas. Respostas não justificadas não serão consideradas.

a) (1,5 ponto). Estenda a função $f : [0, 1) \mapsto [0, 1)$ do intervalo unitário, definida por

$$f(x) = \frac{1}{2},$$

a uma função cuja série de Fourier tenha apenas termos em cossenos e calcule essa série.

b) (1,5 ponto). Estenda a função $g : [0, 1) \mapsto [0, 1)$ do intervalo unitário, definida por

$$g(x) = x,$$

a uma função cuja série de Fourier tenha apenas termos em senos e calcule essa série de Fourier.

c) (0,5 ponto). Use os itens acima para justificar a seguinte igualdade:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}.$$

Solução:

a) Para ter uma serie de Fourier com apenas termos cosenos, extendemos a função f para uma função $\tilde{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ periódica e par. Por exemplo a função constante $\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}$ satisfaz $\tilde{f}(x + 2L) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e todo $L \in \mathbb{R}$. Em particular podemos escolher $L = 1$. Os coeficientes da serie de Fourier de $\tilde{f}$ são então dados pela fórmula

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{f}(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx \qquad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Temos então $a_0 = 1$ e $a_n = 0$ para todo $n \geq 1$ e a serie de Fourier em cosenos torna-se $\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$.

b) Para ter uma serie de Fourier com apenas termos senos, extendemos a função g para uma função $\tilde{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ periódica e impar. Por exemplo a função $\tilde{g}(x) := x$ para $-1 \leq x < 1$ e $\tilde{g}(x + 2) = \tilde{g}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ satisfaz $\tilde{g}(x + 2) = \tilde{g}(x) = -\tilde{g}(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Os coeficientes da serie de Fourier de $\tilde{g}$ são então dados pela fórmula

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{g}(x)\mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}x)\,dx = \int_0^1 x\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,dx \qquad n = 1, 2 \ldots.$$

Integrando por partes obtemos

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left(-x\cos(n\pi x)\,|_0^1 + \int_0^1 \cos(n\pi x)\,dx\right) = -\frac{2}{n\pi}\cos(n\pi) = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \qquad n = 1, 2 \ldots.$$

A serie de Fourier em senos torna-se $\tilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{sen}(n\pi x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{sen}(n\pi x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

c) Basta observar que se uma função f e a sua derivada f' são secionalmente contínuas, então a serie de Fourier de f converge para f em todos os pontos de contínuidade de f. Como as funções f e g definidas acima, assim como as suas derivadas, são secionalmente contínuas e que $x = \frac{1}{2}$ é um ponto de continuidade tanto para f como para g, podemos avaliar as series de Fourier de f e g em $x = \frac{1}{2}$ e obtemos que

$$\frac{1}{2} = f(\frac{1}{2}) = g(\frac{1}{2}) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Questão 2. (3,0 pontos). Considere o seguinte problema de contorno associado à equação de ondas:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + u(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a) (2,0 pontos). Usando o método de separação de variáveis, estabeleça (sem resolver) as equações diferenciais ordinárias resultantes com relação a cada uma das variáveis t e x juntamente com as respectivas condições iniciais ou de contorno (problemas de condições iniciais/contorno com relação às variáveis t e x respectivamente).

b) (1,0 ponto). Sabendo que a solução do problema é dada pela expressão

$$u(x,t) = \cos\big(t\sqrt{1+\pi^2}\big)\operatorname{sen}(\pi x),$$

determine qual é o primeiro instante de tempo t^* para o qual $u(x,t^*) = 0$ para todo $0 \leq x \leq 1$ (primeiro instante de tempo em que a onda passa pela posição de equilíbrio).

Solução:

a) Supomos a existência de solução na forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Substituíndo na primeira equação do modelo temos que

$$X(x)T''(t) + X(x)T(t) = X''(x)T(t).$$

Dividindo por $X(x)T(t)$ obtemos

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Da segunda condição do modelo tem-se $X(0)T(t) = X(1)T(t) = 0$, para todo $t \geq 0$, de onde segue-se

$$X(0) = X(1) = 0, \tag{2}$$

por estarmos procurando soluções não nulas. Analogomente, da última condição do modelo obtemos que

$$X(x)T'(0) = 0,\ 0 \leq x \leq 1,$$

de onde segue que

$$T'(0) = 0. \tag{3}$$

Assim, das equações (1), (2) e (3) obtemos as seguintes EDO's:

$$\begin{cases} T''(t) + (\lambda+1)T(t) = 0, \\ T'(0) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

e

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

b) Temos que determinar o menor tempo tal que

$$\cos\big(\sqrt{1+\pi^2}\, t\big)\operatorname{sen}(\pi x) = 0,$$

para todo $0 \leq x \leq 1$, que obviamente é o menor tempo positivo tal que

$$\cos\big(\sqrt{1+\pi^2}\, t\big) = 0,$$

sendo este dado por

$$\sqrt{1+\pi^2}\, t^* = \frac{\pi}{2} \iff t^* = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\pi^2}}.$$

Questão 3. (3,5 pontos). Determine a solução do seguinte problema de Dirichlet no retângulo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 2 + 3\cos(7\pi y), & 0 < y < 1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Solução:

Vamos primeiro encontrar um conjunto fundamental de soluções satisfazendo a equação diferencial e as condições de contorno homogêneas. Para isto usaremos o método de separação de variáveis onde supomos que

$$u(x,y) = X(x)Y(y).$$

Substituindo esta expressão na equação de Laplace obtemos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$$

a qual, juntamente com as condições de contorno homogêneas, nos leva aos problemas

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & (1.1) \\ X(0) = 0 & (1.2) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0 & (2.1) \\ Y'(0) = Y'(1) = 0\,. & (2.2) \end{cases}$$

Temos então as seguintes possibilidades:

(i) $\lambda < 0$. Tomando $\lambda = -k^2$, com $k > 0$, a equação (2.1) nos dá $Y = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}$. Das condições (2.2) obtemos $C_1 = C_2 = 0$, resultando em $Y = 0$ e na solução $u(x,y) = 0$ que não nos interessa.

(ii) $\lambda = 0$. De (2.1), $Y'' = 0$ que implica em $Y = C_1 y + C_2$. Usando (2.2) obtemos $Y = C_2$. Por outro lado, como $\lambda = 0$, (1.1) e (1.2) nos dão $X = C_3 x$. Encontramos então a solução fundamental

$$u(x,y) = x. \qquad (3)$$

(iii) $\lambda > 0$. Fazemos $\lambda = k^2$, onde $k > 0$. De (2.1), $Y = C_1 \cos(ky) + C_2 \,\mathrm{sen}(ky)$. De (2.2) vem que $C_2 = 0$ e $\mathrm{sen}(ky) = 0$. Logo, $k = n\pi$, onde $n = 1, 2, \ldots$ e $Y = C_1 \cos(n\pi y)$. Além disso, (1.1) e (1.2) implicam em $X = C_3 e^{kx} - C_3 e^{-kx} = 2C_3 \,\mathrm{senh}(kx) = C \,\mathrm{senh}(n\pi x)$.

Assim, neste caso, temos as soluções fundamentais

$$u(x, y) = \mathrm{senh}(n\pi x) \cos(n\pi y), \; n = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

A partir das soluções (3) e (4), obtemos a seguinte candidata à solução do problema:

$$u(x, y) = c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\mathrm{senh}(n\pi x) \cos(n\pi y).$$

Para que a condição não homogênea $u(1, y) = 2 + 3\cos(7\pi y)$ também seja satisfeita devemos ter

$$2 + 3\cos(7\pi y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \,\mathrm{senh}(n\pi) \cos(n\pi y)$$

e, portanto,

$$c_0 = 2, \quad c_7 \,\mathrm{senh}(7\pi) = 3 \quad \text{e} \quad c_n = 0, \; \text{para } n \neq 7.$$

Finalmente, chegamos à solução

$$u(x, y) = 2x + \frac{3}{\mathrm{senh}(7\pi)} \,\mathrm{senh}(7\pi x) \cos(7\pi y).$$