Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — Gabarito da P2 Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Quimica — **Data**: 28/06/2011

---

1. (2.5 p.) Encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno dado

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \tag{1}$$

Descreva todos os casos envolvidos no discriminante da equação característica associada à equação diferencial (1).

Resposta: A equação caracteristica correspondente $r^2+\lambda = 0$ tem as raízes $r_1 = \sqrt{-\lambda}$ e $r_2 = -\sqrt{-\lambda}$. Assim consideramos os seguintes tres casos:

a) $\lambda < 0$: $r_1 = \sqrt{|\lambda|}, r_2 = -\sqrt{|\lambda|}$ raízes da equação característica reais e distintas. A solução geral é dada por

$$y(x) = A\cosh(\sqrt{|\lambda|}x) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda|}x).$$

Como

$$y'(x) = A\sqrt{|\lambda|}\,\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda|}x) + B\sqrt{|\lambda|}\cosh(\sqrt{|\lambda|}x),$$

considerando as condições de contorno, nos temos

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A\cdot 1 + B\cdot 0 \quad \Rightarrow A = 0 \\ 0 &= y'(\pi) = B\sqrt{|\lambda|}\cosh(\sqrt{|\lambda|}\pi). \end{aligned}$$

Então, como $\sqrt{|\lambda|}\cosh(\sqrt{|\lambda|}\pi) \neq 0$ temos $B = 0$. Portanto, a única solução possível quando $\lambda < 0$ é a solução trivial $y(x) = 0$. Conluímos que se $\lambda < 0$ não temos autovalores, já que a única solução é a trivial.

b) $\lambda = 0$: $r_1 = r_2 = 0$ raízes da equação característica reais iguais. A solução geral é dada por $y(x) = Ax + B$. Como $y'(x) = A$, aplicando as restrições no contorno $0 = y(0) = B$ e $0 = y'(\pi) = A$ obtemos que $A = B = 0$. A única solução possível quando $\lambda = 0$ é a solução trivial $y(x) = 0$. Concluímos daí que $\lambda = 0$ não é autovalor deste problema.

c) $\lambda > 0$: $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}, r_2 = -i\sqrt{|\lambda|}$ raízes da equação característica são complexos conjugados. Seja $\gamma = \sqrt{|\lambda|} > 0$. A solução geral é dada por

$$y(x) = A\,\mathrm{sen}(\gamma x) + B\cos(\gamma x).$$

Assim $y'(x) = \gamma A\cos(\gamma x) - \gamma B\,\mathrm{sen}(\gamma x)$. Aplicando a primeira restrição no contorno $0 = y(0) = B$ obtemos $B = 0$. Portanto a solução se torna $y(x) = A\,\mathrm{sen}(\gamma x)$. Além disso temos $0 = y'(\pi) = \gamma A\cos(\gamma\pi)$. Isto implica que ou $A = 0$ (que não nos interessa pois fornece solução trivial) ou $\cos(\gamma\pi) = 0$. Então, como $\gamma > 0$, concluímos que $\gamma\pi = n\pi/2$, com $n = 1, 3, 5, \ldots$, e concluímos daí que $\lambda = \gamma^2 = \left(\frac{(2k-1)}{2}\right)^2$, $k \geq 1$. Daí temos que os autovalores correspondentes a $\lambda > 0$ são da forma $\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)}{2}\right)^2$, com $k \geq 1$, e suas autofunções correspondentes serão $y_k(x) = \mathrm{sen}(\frac{2k-1}{2}x)$.

Em resumo, obtivemos que as auto-valores e auto-funções da EDO são dadas por $\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2$ e $y_k(x) = \mathrm{sen}(\frac{2k-1}{2}x)$, $k \geq 1$.

2. (2.5 p.) Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \le x \le \pi$. Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} f(2\pi - x), & \text{se } \pi < x < 2\pi, \\ f(x), & \text{se } 0 \le x \le \pi. \end{cases} \tag{2}$$

a) (1.5 p.) Ache a série de Fourier da extensão ímpar $\widetilde{g}_i(x)$ de $g(x)$ definida em (2) suponha que $\widetilde{g}_i(x + 4\pi) = \widetilde{g}_i(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

b) (1.0 p.) Esboçe o gráfico da série obtida no item 2a no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

Resposta: a) Observamos que

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \le x \le \pi \\ \operatorname{sen}(2\pi - x) & \text{se } \pi < x < 2\pi \end{cases} = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \le x \le \pi \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Para que $\widetilde{g}_i$ satisfaça as condições exigidas, ela tem de ser

$$\widetilde{g}_i(x) = \begin{cases} -g(-x) & \text{se } -2\pi < x < 0 \\ g(x) & \text{se } 0 < x < 2\pi \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 2\pi, \end{cases}$$

supondo tambem que $\widetilde{g}_i(x + 4\pi) = \widetilde{g}_i(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Como $-\pi \le x < 0$ implica $0 < -x \le \pi$ e para tal x temos $\widetilde{g}_i(x) = -g(-x) = -\operatorname{sen}(-x) = \operatorname{sen} x$. Analogo $-2\pi < x < -\pi$ implica $\pi < -x < 2\pi$ e para tal x temos $\widetilde{g}_i(x) = -g(-x) = -(-\operatorname{sen}(-x)) = -\operatorname{sen} x$. Então

$$\widetilde{g}_i(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se } -2\pi < x < -\pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{se } 0 \le x \le \pi \\ -\operatorname{sen} x & \text{se } \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{se } x = 2\pi \end{cases}$$

e $\widetilde{g}_i(x + 4\pi) = \widetilde{g}_i(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim a série de Fourier dela é dada por

$$S(x; \widetilde{g}_i) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{nx}{2},$$

onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{g}(x) \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{g}(x) \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx \end{aligned}$$

Com $y = 2\pi - x$ temos $dy = -dx$ e podemos escrever

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx = -\int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}(2\pi - y) \operatorname{sen}(\frac{n}{2}(2\pi - y))\, dy = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2\pi - y) \operatorname{sen}(\frac{n}{2}(2\pi - y))\, dy.$$

Como

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\pi - y) &= -\operatorname{sen} y \\ \operatorname{sen}(\frac{n}{2}(2\pi - y)) &= \operatorname{sen}(n\pi - \frac{ny}{2}) = \operatorname{sen} n\pi \cos \frac{ny}{2} - \cos n\pi \operatorname{sen} \frac{ny}{2} = (-1)^{n+1} \operatorname{sen} \frac{ny}{2} \end{aligned}$$

concluimos que

$$-\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}\, dx = (-1)^{n+1} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} y \operatorname{sen} \frac{ny}{2}\, dy = -(-1)^n \int_0^{\pi} \operatorname{sen} y \operatorname{sen} \frac{ny}{2}\, dy$$

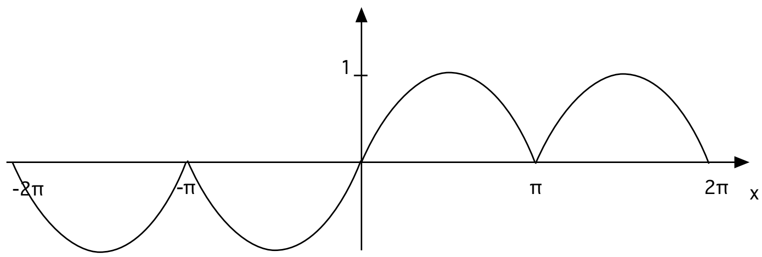

Figura 1: Gráfico da série de Fourier $S(x;\widetilde{g}_i)$

e assim

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi \operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\,dx.$$

Como $\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\frac{nx}{2} = \frac{1}{2}(\cos(x(1-\frac{n}{2})) - \cos(x(1+\frac{n}{2}))$ temos

$$b_n = \frac{1-(-1)^n}{2\pi}\int_0^\pi \Big(\cos(x(1-\frac{n}{2})) - \cos(x(1+\frac{n}{2}))\Big)\,dx$$

Calculamos então que para $n = 2k$ par, $k \geq 1$, temos $b_{2k} = 0$. Como para $n \neq 2$ temos

$$\int_0^\pi \cos(x(1-\frac{n}{2}))\,dx = \frac{1}{1-\frac{n}{2}}\operatorname{sen}(1-\frac{n}{2})x\,|_0^\pi = \frac{2}{2-n}\operatorname{sen}(1-\frac{n}{2})\pi = \frac{2}{n-2}\operatorname{sen}(\frac{n-2}{2})\pi,$$

$$\int_0^\pi \cos(x(1+\frac{n}{2}))\,dx = \frac{1}{1+\frac{n}{2}}\operatorname{sen}(1+\frac{n}{2})x\,|_0^\pi = \frac{2}{2+n}\operatorname{sen}(1+\frac{n}{2})\pi = \frac{2}{2+n}\operatorname{sen}(\frac{n+2}{2})\pi.$$

Para $n = 2k-1$ ímpar, $k \geq 1$, calculamos

$$b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-3)\pi}\operatorname{sen}\frac{(2k-3)\pi}{2} - \frac{2}{(2k+1)\pi}\operatorname{sen}\frac{(2k+1)\pi}{2}$$

Assim, a série de Fourier é dada por

$$S(x,\widetilde{g}_i) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}\operatorname{sen}\frac{(2k-1)x}{2}.$$

b) Note que a extensão $\widetilde{g}_i(x)$ é seccionalmente continua em todos os pontos em $[-2\pi, 2\pi]$, pois a função $\operatorname{sen} x$ é continua em $[0,\pi]$ e temos somente finitos pontos de descontinuidade. Analogamente, $\widetilde{g}_i'(x)$ é seccionalmente continua em $[-2\pi, 2\pi]$. Pelo teorema de convergencia concluimos que para todo $x \in \mathbb{R}$

$$S(x;\widetilde{g}_i) = \frac{\widetilde{g}_i(x+) + \widetilde{g}_i(x-)}{2}$$

Pelo continuidade, se $-2\pi < x < -\pi$ ou $-\pi < x < 0$ temos $\widetilde{g}_i(x+) = \widetilde{g}_i(x-)$ e portanto $S(x;\widetilde{g}_i) = -\operatorname{sen} x$ ou $\operatorname{sen} x$. Analogamente, se $0 < x < \pi$ ou $\pi < x < 2\pi$ temos $\widetilde{g}_i(x+) = \widetilde{g}_i(x-)$ e portanto $S(x;\widetilde{g}_i) = \operatorname{sen} x$ ou $-\operatorname{sen} x$. Temos tambem $\widetilde{g}_i(-2\pi-) = 0 = \widetilde{g}_i(-2\pi+)$, $\widetilde{g}_i(-\pi-) = 0 = \widetilde{g}_i(-\pi+)$, $\widetilde{g}_i(\pi-) = 0 = \widetilde{g}_i(\pi+)$ e $\widetilde{g}_i(2\pi-) = 0 = \widetilde{g}_i(2\pi+)$ e, portanto, $S(x;\widetilde{g}_i) = 0$ em todos esses pontos. Ver (Figura 1)

3. (2.5 p.) Encontre a solução da equação do calor $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, $0 < x < L$, $t > 0$, que satisfaz o conjunto dado de condições de contorno e temparatura inicial

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x, \quad 0 < x < L. \end{cases}$$

Resposta: Aplicando a técnica de separação de variáveis, vamos supor que a solução seja da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Então, pelo equação de calor, temos $\alpha^2 X''T = XT'$. Rearranjando os termos obtemos $\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'}{T} = -\lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, pois o primeiro termo dessa equação só depende de x, o segundo só depende de t e como desejamos que sejam iguais para todo $x \in (0, L)$ e $t > 0$ concluimos que independente de x e t e, portanto, são uma constante.

Assim as equações diferenciais diferenciais ordinárias nas variáveis x e t associadas são da forma

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0. \tag{3}$$

Das condições de contorno temos que $X(0)T(t) = 0$ e $X'(L)Y(t) = 0$ para todo $t > 0$. Como não nos interessam soluções nulas, temos que $X(0) = X'(L) = 0$.

Resolvendo primeiro o problema

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X'(L) = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Como no questão 1 concluimos que os auto-valores e as auto-soluções são

$$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\right)^2 \qquad \text{e} \qquad X_k(x) = \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \quad k \geq 1.$$

Assim, a solução correspondente da equação (3) em t é dada por $T_k(t) = e^{-\left(\alpha \frac{(2k-1)\pi}{2L}\right)^2 t}$, $k \geq 1$.

Assim, obtemos as soluções fundamentais

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = e^{-(\alpha \frac{(2k-1)\pi}{2L})^2 t} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi x}{2L}, \quad k \geq 1.$$

A série de funções que é candidata a solução é da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1,3,5,\ldots} c_n \, e^{-(\alpha \frac{n\pi}{2L})^2 t} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L}.$$

Analisando a condição inicial para determinar os coeficientes c_n, temos

$$x = u(x,0) = \sum_{n=1,3,5,\ldots} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L}, \quad 0 < x < L. \tag{5}$$

Note que somente os coeficientes ímpares são não nulos e, portanto, necessitamos considerar a seguinte extensão da função $f(x) = x$ para determinar os coeficientes. Vamos então considerar uma extensão ímpar e $4L$-periodica $\widetilde{f}_i(x)$ da função da seguinte maneira:

$$\widetilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x \leq L \\ f(2L - x) & \text{se } L < x < 2L \\ -f(-x) & \text{se } -L \leq x < 0 \\ -f(2L + x) & \text{se } -2L < x < -L \\ 0 & \text{se } x = 0 \text{ ou } x = 2L \end{cases} = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq L \\ 2L - x & \text{se } L < x \leq 2L \\ x & \text{se } -L \leq x < 0 \\ -2L - x & \text{se } -2L < x < -L \end{cases}$$

supondo tambem que $\widetilde{f}_i(x + 4L) = \widetilde{f}_i(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Observamos que a série de Fourier de $\widetilde{f}_i(x)$ e dada por

$$S(x; \widetilde{f}_i(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L}, \qquad \text{onde} \qquad C_n = \frac{2}{2L} \int_0^{2L} \widetilde{f}_i(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} \, dx.$$

Com a representação de $\widetilde{f}_i(x)$ em cima temos então

$$C_n = \frac{1}{L} \left(\int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} \, dx + \int_L^{2L} f(2L - x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L} \, dx \right).$$

Com $y = 2L - x$ temos $dy = -dx$ e

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi(2L-y)}{2L} = \operatorname{sen}\left(n\pi - \frac{n\pi y}{2L}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2L} - n\pi\right)$$

e podemos então escrever

$$\int_L^{2L} f(2L-x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}\,dx = -\int_0^L f(y)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{2L} - n\pi\right)\,dy = \begin{cases} -\int\limits_0^L f(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2L}\,dy & \text{se } n \text{ par} \\ \int\limits_0^L f(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{2L}\,dy & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Concluimos que os coeficientes C_n são determinados pelo

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}\,dx & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Com integração por partes, para n ímpar calculamos

$$\frac{2}{L}\int\limits_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}\,dx = \frac{2}{L}\int\limits_0^L x\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}\,dx = \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} = \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2(-1)^{n+1}$$

e assim

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2(-1)^{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Como as funções $\widetilde{f}_i$ e $\widetilde{f}_i'$ são seccionalmente continuas, podemos aplicar o teorema de convergencia de Fourier. Como $\widetilde{f}_i$ é continua podemos concluir que $S(x;\widetilde{f}_i) = \widetilde{f}_i(x)$ para todo x. Como $\widetilde{f}_i(x)$ é uma extensão da função $f(x) = x$, temos em particular $x = \widetilde{f}_i(x) = S(x;\widetilde{f}_i)$ se $0 < x < L$. Temos então

$$x = \sum_{n=1,3,5,\ldots}\left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2(-1)^{n+1}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}, \quad 0 < x < L.$$

Comparando com (5) concluimos que $c_n = \left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2(-1)^{n+1}$ e chegamos a solução

$$u(x,y) = \left(\frac{2L}{\pi}\right)^2\sum_{n=1,3,5,\ldots}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}e^{-(\alpha\frac{n\pi}{2L})^2 t}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}.$$

4. (2.5 p.) Encontre a solução $u(x,y)$ da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ na faixa semi-infinita $R = (0,\infty)\times(0,b)$, que satisfaz as condições de contorno

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,b) = 0, \ x > 0, \\ u(0,y) = 100, \quad 0 < y < b. \end{cases}$$

Suponha que $u(x,y)$ é limitada quando $x \to \infty$.

Resposta: Aplicando a técnica de separação de variáveis, vamos supor que a solução da equação de Laplace seja da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$. A equação de Laplace fornece $X''Y = -XY''$. Rearranjando os termos obtemos $\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, pois o primeiro termo dessa equação só depende de x, o segundo só depende de y e como desejamos que sejam iguais para todo $x > 0$ e $y \in (0,b)$ concluimos que independente de x e y e, portanto, são uma constante.

Assim as equações diferenciais diferenciais ordinárias nas variáveis x e y são da forma

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad Y''(y) + \lambda Y(y) = 0.$$

Das condições de contorno temos que $X(x)Y(0) = 0$ e $X(x)Y(b) = 0$ para todo $x > 0$. Como não nos interessam soluções nulas, temos que $Y(0) = Y(b) = 0$.

Resolvendo primeiro o problema

$$\begin{cases} Y'' + \lambda Y = 0, \\ Y(0) = Y(b) = 0 \end{cases}, \tag{6}$$

consideramos a equação característica $r^2 + \lambda = 0$ e as raízes dela. Devemos estudar os casos $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda > 0$.

a) $\lambda < 0$: raízes da equação característica reais e distintas $r_1 = \sqrt{|\lambda|}, r_2 = -\sqrt{|\lambda|}$. Então a solução geral é dada por $Y(y) = A\cosh(\sqrt{|\lambda|}y) + B\,\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda|}y)$. Considerando a condição de contorno, nos temos $0 = Y(0) = A$ e portanto a solução se torna $Y(y) = B\,\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda|}y)$. Considerando a outra condição de contorno, nos temos $0 = Y(b) = B\,\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda|}b)$. Como $\lambda \neq 0$ e $b \neq 0$ temos $\mathrm{senh}(\sqrt{|\lambda|}b) \neq 0$ e portanto $B = 0$. Portanto, a única solução possível quando $\lambda < 0$ é a solução trivial $Y(y) = 0$.

b) $\lambda = 0$: raízes da equação característica reais iguais $r_1 = r_2 = 0$. A solução geral é dada por $Y(y) = Ay + B$. Como $0 = Y(0) = B$ e $0 = Y(b) = Ab + B$ obtemos que $A = B = 0$. A única solução possível quando $\lambda = 0$ é a solução trivial $Y(y) = 0$.

c) $\lambda > 0$: raízes da equação característica são complexos conjugados $r_1 = i\sqrt{|\lambda|}, r_2 = -i\sqrt{|\lambda|}$. Seja $\gamma = \sqrt{|\lambda|} > 0$. A solução geral é dada por

$$Y(y) = A\,\mathrm{sen}(\gamma y) + B\cos(\gamma y).$$

Aplicando a primeira restrição no contorno $0 = Y(0) = B$ obtemos $B = 0$. Portanto a solução se torna $Y(y) = A\,\mathrm{sen}(\gamma y)$. Além disso temos $0 = Y(b) = \gamma A\,\mathrm{sen}(\gamma b)$. Isto implica que ou $A = 0$ ou $\mathrm{sen}(\gamma b) = 0$. Então, como $\gamma > 0$ e $b > 0$, concluímos que $\gamma b = n\pi$, com $n \geq 1$, e concluímos daí que $\lambda = \gamma^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $n \geq 1$. Daí temos que os autovalores correspondentes a $\lambda > 0$ são da forma $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, com $n \geq 1$, e suas autofunções correspondentes serão $Y_k(y) = \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{b}y)$.

Em resumo, concluimos que as auto-valores e as auto-soluções de (6) são

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad \text{e} \quad Y_n(y) = \mathrm{sen}\,\frac{n\pi y}{b}, \quad n \geq 1.$$

Com estes auto-valores podemos usar a EDO em x para obter as soluções correspondentes $X_n(x)$. Temos, então, que

$$X_n''(x) - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 X_n(x) = 0, \quad x > 0.$$

Considerando a equação caracteristica $r^2 - (n\pi/b)^2 = 0$ com raízes $r_{1,2} = \pm\frac{n\pi}{b}$, temos que a solução geral é dada por

$$X_n(x) = Ce^{\frac{n\pi}{b}x} + De^{-\frac{n\pi}{b}x}.$$

A condição que cada solução $u(x,y) = X(x)Y(y) \to 0$ quando $x \to \infty$, implica que $C = 0$ pois $e^{\frac{n\pi x}{b}}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi y}{b} \to \infty$ quando $x \to \infty$. Então a solução se torna

$$X_n(x) = e^{-\frac{n\pi x}{b}}, \quad n \geq 1.$$

Assim, obtemos as soluções fundamentais

$$u_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y) = e^{-\frac{n\pi x}{b}}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi y}{b}, \quad n \geq 1.$$

A série de funções que é candidata a solução é da forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n\pi x}{b}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

Analisando a condição inicial para determinar os coeficientes c_n, temos

$$100 = u(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}, \quad 0 < y < b.$$

Concluimos que os coeficientes são determinados pelo

$$c_n = \frac{200}{b} \int_0^b \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}\, dy = \frac{200}{n\pi}(1 - \cos(n\pi)) = \begin{cases} 0 & n \text{ par} \\ \frac{400}{n\pi} & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Finalmente, chegamos a solução

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{400}{(2k-1)\pi} e^{-(2k-1)\pi x/b} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)\pi y}{b}.$$

Professores: Carlos Ferraris, Katrin Gelfert, I Shih, Pedro Gamboa, Xavier Carvajal.