Gabarito da 2ª Prova Unificada de Cálculo IV – Dezembro de 2010

1ª Questão: (2.0 pts)

Resolva o problema de contorno:

$$\begin{cases} x^2y'' - 6xy' + 10y = 0, & x > 0 \\ y(1) = 1, \ y(2) = 18. \end{cases}$$

Solução: Como se trata de uma equação de Euler, a solução geral pode ser obtida a partir da Equação Indicial (que se obtém procurando-se soluções do tipo $y = x^r$, r constante). A Equação Indicial nesse caso é $r(r-1) - 6r + 10 = 0$, cujas raízes são $r_1 = 2$ e $r_2 = 5$. Portanto, a solução geral é, para $x > 0$,

$$y = C_1x^2 + C_2x^5.$$

Substituindo as condições de contorno, obtemos:

$$\begin{aligned} y(1) &= C_1 + C_2 = 1, \\ y(2) &= 4C_1 + 32C_2 = 18. \end{aligned}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos $C_1 = 1/2$ e $C_2 = 1/2$. Logo, a solução é:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^5.}$$

2ª Questão: (3.0 pts)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de perído 2π tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \le x \le 0, \\ 2 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de $f(x)$;

(b) Determine o conjunto D dos pontos de $\mathbb{R}$ para os quais a série de Fourier de f converge e calcule o valor do limite da série em cada ponto de D;

(c) Dê a expressão da função g periódica de perído 2π que coincide com f no intervalo $0 < x < \pi$, mas que sua série de Fourier contenha **somente** *termos em senos.*

Solução: (a) Calculando diretamente os coeficientes de Fourier de f:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 3.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)\,dx + 2\int_{0}^{\pi}\cos(nx)\,dx\right] = 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\mathrm{sen}(nx)\,dx + 2\int_{0}^{\pi}\mathrm{sen}(nx)\,dx\right]$$
$$= \frac{1}{n\pi}\big[1-\cos(n\pi)\big] = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ é par,} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Logo, série de Fourier de $f(x)$ é:

$$\boxed{S(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\,\mathrm{sen}\big((2k+1)x\big).}$$

(b) Como $f(x)$ e $f'(x)$ são contínuas por partes em $[-\pi,\pi]$, temos que a série de Fourier $S(x)$ de f converge em todos os pontos de $\mathbb{R}$ e seu limite é:

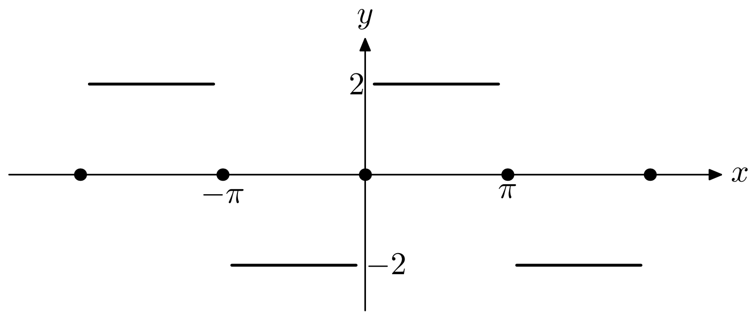
$$S(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f \text{ é contínua em } x, \\ \frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big] & \text{se } f \text{ é descontínua em } x. \end{cases}$$

Logo, $\boxed{D=\mathbb{R}}$ e $S(x)$ é a função periódica de período 2π tal que

$$\boxed{S(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 3/2 & \text{se } x = 0, \\ 2 & \text{se } 0 < x < \pi, \\ 3/2 & \text{se } x = \pi. \end{cases}}$$

(c) Para que g satisfaça as condições exigidas, ela tem de ser uma extensão ímpar de f, isto é,

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -\pi < x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 2 & \text{se } \ 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{se } x = \pi. \end{cases}}$$



Observação: A série de Fourier de $g(x)$ não se altera se redefinirmos os valores de $g(x)$ em um número finito de pontos do intervalo $[-\pi,\pi]$. Portanto, se considerarmos $g(x)$ periódica de período 2π tal que

$$g(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } -\pi \le x \le 0, \\ 2 & \text{se } \ 0 < x < \pi, \end{cases}$$

a resposta está correta.

$\underline{3^{\underline{a}}\ \textbf{Questão:}}$ (2.0 pts)

Usando o método de separação de variáveis, determine a solução geral da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

com condições de contorno do tipo misto:

$$u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0.$$

Solução: Pelo método de separação de variáveis, devemos procurar soluções não nulas da forma $u(t, x) = T(t)X(x)$. Substituindo esta expressão na equação, obtemos,

$$\frac{T'(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

A primeira das equações acima nos fornece solução geral do tipo $T(t) = Ce^{4\lambda t}$, $C \in \mathbb{R}$. Vejamos então para que valores de λ a segunda equação fornece soluções não triviais satisfazendo as condições de contorno. Portanto, devemos analisar as solução de

$$\begin{cases} X'' = \lambda X, \quad 0 < x < \pi, \\ X(0) = X'(\pi) = 0. \end{cases} \qquad (PC)$$

i) Se $\lambda = 0$, a solução geral da equação em (PC) é $X(x) = Ax + B$. Verificando as condições de contorno, obtemos $B = X(0) = 0$ e $A = X'(\pi) = 0$. Logo, não existem solução não nulas nesse caso.

ii) Se $\lambda = \omega^2 > 0$, a solução geral da equação em (PC) é $X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$. Verificando as condição de contorno obtemos,

$$X(0) = A + B = 0,$$
$$X'(\pi) = \omega A e^{\omega\pi} - \omega B e^{-\omega\pi} = 0.$$

O sistema acima por ser expresso na forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega e^{\omega\pi} & -\omega e^{-\omega\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como o determinante da matriz é $-2\omega \cosh(\omega\pi) \neq 0$ (pois $\omega \neq 0$), a única solução dos sistema é a solução nula. Logo, não existem soluções não nulas nesse caso.

iii) Se $\lambda = -\omega^2 < 0$, a solução geral da equação em (PC) é $X(x) = A\cos(\omega x) + B\,\mathrm{sen}(\omega x)$. Verificando as condição de contorno obtemos, $X(0) = A = 0$ e $X'(\pi) = \omega B \cos(\omega\pi) = 0$. Nesse caso, podemos obter soluções não nulas para $\omega = (2k+1)/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Logo, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$, temos $\lambda_k = -[(2k+1)/2]^2$ e as respectivas soluções da forma

$$X_k(x) = B_k \,\mathrm{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right), \quad T_k(t) = C_k \exp\left[-4\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 t\right].$$

A solução geral pedida é, então,

$$\boxed{u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \exp\left[-4\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 t\right] \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{2}x\right).}$$

4ª Questão: (3.0 pts)

Usando o método de separação de variáveis, determine a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; t \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,1) = 0, \\ u(0,x) = x^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 0, \quad 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

Solução: Por separação de variáveis, obtemos

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Temos portanto duas equações:

$$T''(t) = \lambda T(t) \quad \text{e} \quad X''(x) = \lambda X(x) \qquad (*)$$

Determinemos os valores de λ para os quais a segunda equação em $(*)$ possui soluções não triviais que satisfaçam as condições de contorno: $X'(0) = X'(1) = 0$.

i) Se $\lambda = 0$, a solução geral da segunda equação em $(*)$ é $X(x) = Ax + B$. Verificando as condições de contorno, obtemos $A = X'(0) = X'(1) = 0$. Logo, as funções constantes $X(x) = B$, $B \in \mathbb{R}$, devem ser consideradas. Para esse valor de λ, a primeira equação de $(*)$ tem solução geral da forma $T_0(t) = C_0 t + D_0$.

ii) Se $\lambda = \omega^2 > 0$, a solução geral da equação é $X(x) = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$. Verificando as condição de contorno obtemos,

$$\begin{cases} X'(0) = (A - B)\omega = 0 \;\Rightarrow\; A = B. \\ X'(1) = \omega A e^{\omega} - \omega B e^{-\omega} = 0 \;\Rightarrow\; 2\omega A \operatorname{senh}(\omega) = 0 \end{cases}$$

Como $\omega \neq 0$, segue que $A = B = 0$ e, portanto, não existem soluções não nulas nesse caso.

iii) Se $\lambda = -\omega^2 < 0$, a solução geral da segunda equação em $(*)$ é $X(x) = A\cos(\omega x) + B\operatorname{sen}(\omega x)$. Verificando as condições de contorno obtemos, $X'(0) = \omega B = 0 \Rightarrow B = 0$. Logo $X(x) = A\cos(\omega x)$ e $X'(1) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega) = 0$. Nesse caso, podemos obter soluções não nulas para $\omega = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$ e a primeira equação de $(*)$ tem solução geral dada por $T_k(t) = C_k \cos(k\pi t) + D_k \operatorname{sen}(k\pi t)$.

Assim, dos itens (i) e (iii) acima, devemos considerar as soluções $X_k(x) = A_k \cos(k\pi x)$, $0 < x < 1$, para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$. Analogamente, para a primeira equação em $(*)$, devemos considerar as soluções que correspondem a $\lambda = 0$ e $\lambda = -k^2\pi^2$, isto é,

$$T_0(t) = C_0 t + D_0, \quad T_k(t) = C_k \cos(k\pi t) + D_k \operatorname{sen}(k\pi t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Assim, a solução geral da equação que satisfaz as condições de contorno dadas é:

$$u(t,x) = a_0 t + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos(k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(k\pi t)\Big] \cos(k\pi x),$$

onde estamos denotando $a_k = C_k A_k$, $b_k = D_k A_k$, $a_0 = C_0 B$ e $b_0 = D_0 B$.
Para determinar as constantes $a_0, b_0, a_1, \ldots$, vamos impor as condições iniciais, isto é,

$$\begin{array}{r} x^2 = b_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\pi x) \\ 0 = a_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k\pi b_k \cos(k\pi x) \end{array}, \quad 0 < x < 1.$$

Logo, $2b_0, a_1, a_2, \ldots$ são os coeficientes de Fourier da função f periódica de perído 2 tal que $f(x) = x^2$, $-1 < x < 1$ e $2a_0, \pi b_1, 2\pi b_2, \ldots$ são os coeficientes de Fourier da função nula (necessariamente todos nulos).
Vamos então calcular:

$$2b_0 = 2\int_0^1 x^2\, dx = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad b_0 = \frac{1}{3}.$$

$$a_k = 2\int_0^1 x^2 \cos(k\pi x)\, dx = \frac{2}{k^3\pi^3} \int_0^{k\pi} y^2 \cos(y)\, dy = (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2}.$$

Portanto, a solução é:

$$\boxed{u(t,x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t) \cos(k\pi x).}$$