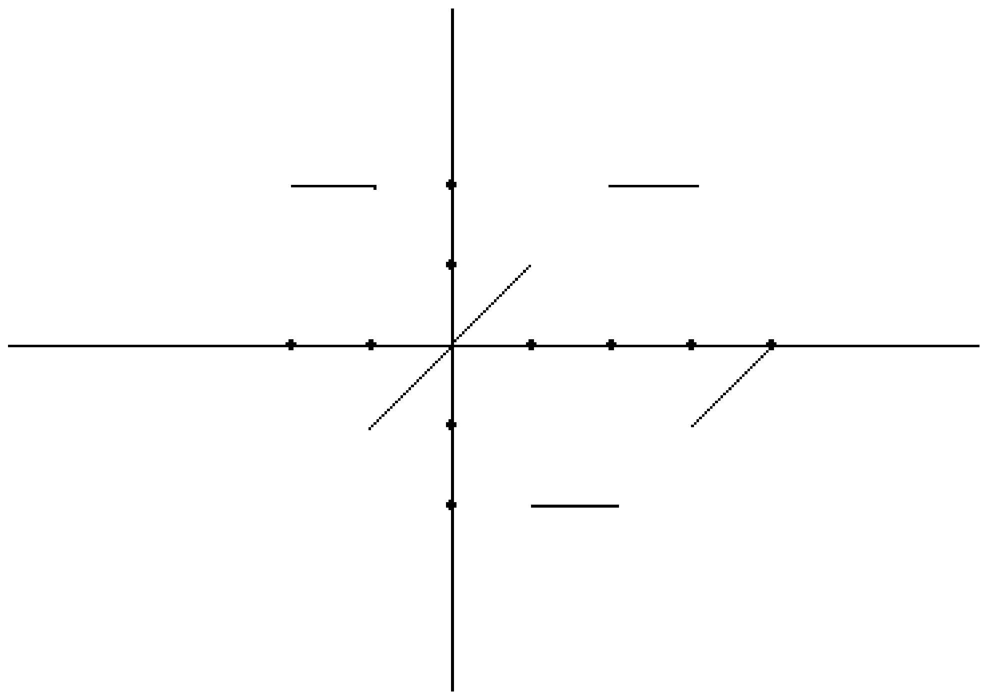
Questão 1: (2.5 pontos)
Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ -2, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

(a) (0.8 ponto) Seja $\tilde{f}$ a extensão impar e períodica de período 4 da função f. Esboce o gráfico de $\tilde{f}$ no intervalo $[-2, 4]$.

Solução:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x); & 0 \le x < 2 \\ 0; & x = 0 \\ -f(-x); & -2 < x < 0 \end{cases}$$



(b) (1.0 ponto) Encontre a série de Fourier de $\tilde{f}$.

Solução:
Como $\tilde{f}$ é impar, os coeficientes $a_0 = a_n = 0$; $n \ge 1$. Como $L = 2$ temos

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \int_0^1 x sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx - 2\int_1^2 sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= -\frac{2x}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)|_0^1 + \frac{4}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)|_0^1 + \frac{4}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)|_1^2 \\
&= -\frac{6}{n\pi}cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2}sen\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4(-1)^n}{n\pi};\ n \geq 1
\end{aligned}
$$

Assim $S.F.[\tilde{f}] = \sum_1^\infty b_n sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right)$

(c) (0.7 ponto) Escreva a série do item (b) no ponto $x = 1$ e ache a sua soma.

Solução:
Pelo Teorema de Fourier, tomando $x = 1$, temos que

$$\sum_1^\infty b_n sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right) = \frac{f(1^+) + f(1^-)}{2} = -1/2$$

Questão 2: (2.0 pontos)
Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 2, \quad u(1,t) = 3, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

que representa a distribuição de temperatura numa barra.

(a) (1.0 ponto) Determine a temperatura estacionária (ou permanente ou de equilibrio) $v(x)$ da barra.

Solução:
A solução estacionária satisfaz o seguinte problema

$$
\begin{aligned}
v_{xx} &= 0 \\
v(0) &= 2 \\
v(1) &= 3
\end{aligned}
$$

Logo, da primeira equação temos que $v(x) = ax + b$. Pelas condições de fronteira, obtemos: $a = 1$ e $b = 2$. Assim, $v(x) = x + 2$.

(b) (1.0 ponto) Considerando $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$, encontre o Problema de Valor Inicial e de Fronteira que a função w deverá satisfazer.

Solução:
Como $w_t = u_t,\ w_{xx} = u_{xx} - v_{xx} = u_x x$, temos,

$$\begin{aligned} w_t - 4w_{xx} &= u_t - 4u_{xx} = 0 \\ w(0,t) &= u(0,t) - v(0) = 2 - 2 = 0 \\ w(1,t) &= u(1,t) - v(1) = 3 - 3 = 0 \\ w(x,0) &= u(x,0) - v(x) = \varphi(x) - (x+2) \end{aligned}$$

Concluímos que w é solução do seguinte PVIF

$$\begin{cases} w_t - 4w_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ w(0,t) = 0, \quad w(1,t) = 0, & t \geq 0, \\ w(x,0) = \varphi(x) - x - 2, & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Considere o seguinte problema

$$u_{tt} - u_{xx} - 4u_x = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0, \tag{1}$$
$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

(a) (1.0 ponto) Usando o método de separação de variáveis, explicite as duas equações diferenciais ordinárias associadas a equação (1).

Solução:
Seja $u(x,t) = F(x)G(t)$. Substituindo na equação (1), temos:

$$\frac{G''(t)}{G(t)} - \frac{F''(x)}{F(x)} - 4\frac{F'(x)}{F(x)} = 0$$

ou ainda

$$\frac{G''(t)}{G(t)} = \frac{F''(x) + 4F'(x)}{F(x)} = \lambda$$

visto que x e t são variáveis independentes. Temos as seguintes EDOs:

$$\begin{aligned} G''(t) - \lambda G(t) &= 0 \\ F''(x) + 4F'(x) - \lambda F(x) &= 0 \end{aligned}$$

(b) (1.5 ponto) Utilizando (2), obtenha todos os autovalores e as respectivas autofunções do problema de contorno correspondente a equação diferencial ordinária na variável x.

Solução:
Problema de contorno para a EDO na variável x. Da condição (2) obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = u(0,t) = F(0)G(t) &\rightarrow F(0) = 0 \\ 0 = u(2,t) = F(2)G(t) &\rightarrow F(2) = 0 \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} F''(x) + 4F'(x) - \lambda F(x), & 0 < x < 2, \\ F(0) = F(2) = 0 \end{cases}$$

sendo o polinômio característico dado por $r^2 + 4r - \lambda = 0$. As raízes do polonômio são:

$$r = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4\lambda}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4 + \lambda}}{2} = -2 \pm \sqrt{4 + \lambda}.$$

Temos três casos distintos:

$\lambda = -4$**:** Raízes reais iguais, $r_1 = r_2 = -2$. Solução geral da EDO:

$$F(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Como buscamos uma solução não nula do problema, das condições de contorno concluímos:

$$\begin{aligned} 0 &= F(0) = c_1 \rightarrow c_1 = 0 \\ 0 &= F(2) = 2c_2 e^{-4} = 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

Logo, se $\lambda = -4$ temos apenas a solução trivial $F(x) = 0$.

$\lambda > -4$**:** Neste caso o polinômio caracteristico tem raízes reais distintas: $r_1 = -2 + \sqrt{\lambda + 4}$ e $r_2 = -2 - \sqrt{\lambda + 4}$. A solução será da forma $F(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$. Das condições de contorno obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= F(0) = c_1 + c_2 \rightarrow c_1 = -c_2 \\ 0 &= F(2) = -c_2 e^{2r_1} - c_2 e^{2r_2} = 0 \rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

Logo, se $\lambda > -4$ temos apenas a solução trivial $F(x) = 0$.

$\lambda < -4$**:** Neste caso o polinômio caracteristico tem raízes complexas conjugadas: $r_1 = -2 + i\sqrt{-\lambda - 4}$ e $r_2 = -2 - i\sqrt{-\lambda - 4}$. Seja $\gamma = \sqrt{-\lambda - 4}$. A solução será da forma $F(x) = e^{-2x}(c_1 cos(\gamma x) + c_2 sen(\gamma x))$. Das condições de contorno obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= F(0) = c_1 \\ 0 &= F(2) = c_2 e^{-4} sen(2\gamma) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \text{ ou } sen(2\gamma) = 0, \end{aligned}$$

como buscamos uma solução não trivial temos $c_2 \neq 0$ (caso contrário F(x)=0), e portanto $sen(2\gamma) = 0 \rightarrow 2\gamma = n\pi; n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\sqrt{-\lambda + 4} = \gamma = \frac{n\pi}{2} \rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{4} + 4, \ n \in \mathbb{N}$$

são autovalores do problema associados às autofunções $F_n(x) = e^{-2x} sen\left(\frac{n\pi x}{2}\right), \ n \in \mathbb{N}$.

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere o seguinte problema para a equação de Laplace

$$r^2u_{rr} + ru_r + u_{\theta\theta} = 0, \qquad 0 < r < 3, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,\frac{\pi}{2}) = 0, \qquad 0 \leq r \leq 3, \tag{4}$$

$$u(3,\theta) = 4\text{sen}(8\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

(a) (2.3 pontos) Supondo que $u(r,\theta)$ seja uma função limitada, use o método de separação de variáveis e obtenha a solução $u(r,\theta)$ em série que satisfaz a E.D.P. (3) e a condição de fronteira (4).

Solução:
Suponha $u(r,\theta) = F(r)G(\theta)$, substituindo equação (3) temos:

$$r^2F''(r)G(\theta) + rF'(r)G(\theta) + F(r)G(\theta) = 0$$

Logo

$$\frac{r^2F''(r) + rF'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\theta)}{G(\theta)} = \lambda \ \ (cte)$$

pois o primeiro termo da igualdade acima só depende de r, e o segundo termo só depende de θ. Assim obtemos as seguintes EDOs associadas ao problema:

$$\begin{cases} G'(\theta) + \lambda G(\theta) = 0 \\ r^2F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0 \ \ (\text{ eq. de Euler}) \end{cases}$$

Como buscamos uma solução não nula do problema, de (4) obtemos:

$$0 = u(r,0) = F(r)G(0) \to G(0) = 0$$
$$0 = u(r,\pi/2) = F(r)G(\pi/2) \to G(\pi/2) = 0$$

Temos assim o seguinte problema de autovalores:

$$\begin{cases} G'(\theta) + \lambda G(\theta) = 0 \\ G(0) = G(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

o polinômio caracteristico associado ao problema acima é:

$$z^2 + \lambda = 0.$$

Temos assim três casos possíveis:

$\lambda = 0$**:** Neste caso temos raízes $z_1 = z_2 = 0$, com solução da forma $G(\theta) = a\theta + b$ e das condições de contorno $G(0) = G(\pi/2) = 0$, concluimos que $a = b = 0$.

$\lambda < 0$**:** Neste caso temos raízes reais distintas $z_1 = \sqrt{-\lambda}$, $\ z_2 = -\sqrt{-\lambda}$, com solução da forma $G(\theta) = c_1e^{z_1\theta} + c_2e^{z_2\theta}$. Das condições de contorno temos:

$$0 = G(0) = c_1 + c_2 \to c_1 = -c_2$$
$$0 = G(\pi/2) = -c_2e^{z_1\pi/2} + c_2e^{z_2\pi/2} = 0 \to c_2 = 0$$

Assim, neste caso temos apenas a solução trivial $G(\theta) = 0$.

$\lambda > 0$**:** Neste caso o polinômio caracteristico tem raízes complexas conjugadas: $z_1 = i\sqrt{\lambda}$ e $z_2 = -i\sqrt{\lambda}$. A solução será da forma $G(\theta) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}\theta) + c_2 sen(\sqrt{\lambda}\theta)$. Das condições de contorno obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= G(0) = c_1 \\ 0 &= G(\pi/2) = c_2 sen(\sqrt{\lambda}\pi/2) = 0 \to c_2 = 0 \text{ ou } sen(\sqrt{\lambda}\pi/2) = 0, \end{aligned}$$

como buscamos uma solução não trivial temos $c_2 \neq 0$ (caso contrário $G(\theta) = 0$), e portanto $sen(\sqrt{\lambda}\pi/2) = 0 \to \sqrt{\lambda}\pi/2 = n\pi; n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lambda = 4n^2,\ n \in \mathbb{N}$$

são autovalores do problema associados às autofunções $G_n(\theta) = \alpha_n sen(2n\theta),\ n \in \mathbb{N}$. Onde α_n são constantes.

Resolvendo a equação de Euler ($\lambda = 4n^2$):

$$r^2 F''(r) + rF'(r) - 4n^2 F(r) = 0$$

Note que a equação indicial:

$$\nu^2 - 4n^2 = 0$$

tem duas raízes reais distintas $\nu_1 = 2n$ e $\nu_2 = -2n$. Logo a solução da equação de Euler será:

$$F_n(r) = c_n r^{2n} + d_n r^{-2n}$$

.

Como buscamos uma solução limitada para o problema, e $\lim_{r\to 0} r^{-2n} = \infty$, tomamos $d_n = 0$. Obtemos assim que para cada $n \in \mathbb{N}$ a função $F_n(r)G_n(\theta)$ satisfaz a equação (3) e a condição (4). Logo a série candidata à solução do problema é:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{2n} sen(2n\theta).$$

(b) (0.7 ponto) Analisando a condição de fronteira (5) encontre a solução do problema que satisfaz (3), (4) e (5).

Solução:
Tomando $r = 3$ na solução em série, obtemos:

$$u(3,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n 3^{2n} sen(2n\theta).$$

Mas da condição de fronteira (5) sabemos que

$$u(3,\theta) = 4sen(8\theta)$$

Logo, comparando as duas últimas equações temos que:

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \neq 4, \\ \frac{4}{3^8} & n = 4 \end{cases}$$

Portanto, a solução encontrada para o problema é:

$$u(r,\theta) = \frac{4}{3^8} r^8 sen(8\theta)$$

LEMBRETES NO VERSO

Lembretes:

1. Integrais.
   - $\int x\text{sen}(ax)dx = \frac{1}{a^2}\text{sen}(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$.
   - $\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\text{sen}(ax)$.
2. Tabela resumo para EDO de 2ª ordem com coeficientes constantes: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.
   - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.
   - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 = r_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_1 x}$.
   - $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_1 = \alpha - \beta i \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\text{sen}(\beta x))$.
3. Equação de Euler: $r^2 y''(r) + \alpha r y'(r) + \beta y(r) = 0$.
   - equação indicial: $m^2 + (\alpha - 1)m + \beta = 0$,
   - raizes: m_1 e m_2 reais,
   - solução:

$$\begin{aligned} m_1 \neq m_2 \quad &\Rightarrow \quad y(r) = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2}. \\ m_1 = m_2 \quad &\Rightarrow \quad y(r) = (c_1 + c_2 \ln r) r^{m_1}. \end{aligned}$$