GABARITO DA 2^a PROVA - CÁLCULO IV
1^0 PERÍODO 2009

1ª Questão:(valor 2.0)

(a) O gráfico de f é esboçado na Figura 1.

(b)

• Cálculo de a_0.

Temos que:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f\ (x)dx \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{2}\left\{-2\int_{-2}^{-1} dx + \int_{1}^{2} dx\right\} \Longrightarrow a_0 = \frac{1}{2}\left\{-2\,[x]_{-2}^{-1} + [x]_{1}^{2}\right\} \Longrightarrow a_0 = -\frac{1}{2}. \tag{(1)}$$

• Cálculo de a_n.

Temos que:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f\ (x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx \Longrightarrow a_n = \frac{1}{2}\left\{-2\int_{-2}^{-1}\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{1}^{2}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right\},$$

ou equivalentemente,

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{-\frac{4}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_{-2}^{-1} + \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2}x\right]_{1}^{2}\right\},$$

ou equivalentemente,

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right\} \Longrightarrow a_n = \frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}. \tag{(2)}$$

• Cálculo de b_n.

Temos que:

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f\ (x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx \Longrightarrow b_n = \frac{1}{2}\left\{-2\int_{-2}^{-1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_{1}^{2}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right\},$$

ou equivalentemente,

$$b_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_{-2}^{-1} - \frac{2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2}x\right]_{1}^{2}\right\},$$

ou equivalentemente,

$$b_n = \frac{1}{2}\left\{\frac{4}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4(-1)^n}{n\pi} - \frac{2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right\} \Longrightarrow b_n = \frac{3}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{3(-1)^n}{n\pi}. \quad ((3))$$

Portanto, a série de Fourier da função f é da forma:

$$-\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi}{2}x + \frac{3}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right]\sin\frac{n\pi x}{2}. \quad ((4))$$

(c)

Teorema de Fourier: Suponha que f e f' são contínuas por partes no intervalo $[-L, L]$.

Suponha também que f está definida fora do intervalo $[-L, L]$, de modo a ser periódica

com período $T = 2L$. Então, f tem uma série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}. \quad ((5))$$

Além disso, a série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é

contínua e converge para $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$ em todos os pontos onde f é descontínua.

No nosso caso f e f' satisfazem as hipóteses do teorema no intervalo $[-2, 2]$ e $T = 4$.

A função f é descontínua em $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ e $x = 2$. Então, pelo Terema de

Fourier temos que se:

(i) $x = -2 \Longrightarrow$ a série de Fourier converge para $\dfrac{f\ (-2+) + f\ (-2-)}{2} =$
$\dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2}$;

(ii) $x = -1 \Longrightarrow$ a série de Fourier converge para $\dfrac{f\ (-1+) + f\ (1-)}{2} =$
$\dfrac{0-2}{2} = -1$;

(iii) $x = 1 \Longrightarrow$ a série de Fourier converge para $\dfrac{f\ (1+) + f\ (1-)}{2} = \dfrac{1+0}{2} =$
$\dfrac{1}{2}$.

(iv) $x = 2 \Longrightarrow$ a série de Fourier converge para $\dfrac{f\ (2+) + f\ (2-)}{2} =$
$\dfrac{-2+1}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

Por outro lado, nos pontos onde f é contínua pelo Terema de Fourier temos que a série
converge para $f\ (x)$.

O gráfico da soma da série é esboçado na Figura 2.

2ª Questão:(valor 2.5)

$a)$ Denotemos por $g(x)$ a extensão par e periódica definida por:

$$g(x) = \left| \begin{array}{c} f(x),\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ f(-x),\ \ -\pi < x < 0. \end{array} \right. \qquad ;\ g(x+2\pi) = g(x)$$

Logo:

$$g(x) = \left| \begin{array}{c} x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2, \\ 0,\ \pi/2 < x < \pi, \\ -x,\ \ -\pi/2 < x, 0, \\ 0,\ \ -\pi < x < -\pi/2. \end{array} \right. \qquad ;\ g(x) = g(x+2\pi) \qquad ((6))$$

O gráfico de $g(x)$ é esboçado na Figura 3.

$b)$ Denotemos por $h(x)$ a extensão ímpar e periódica definida por:

$$h(x) = \left| \begin{array}{c} f(x),\ 0 < x < 2, \\ 0,\ x = 0 \text{ e } x = 2, \\ -\ f(-x),\ \ -2 < x < 0. \end{array} \right. \qquad ;\ h(x) = h(x+2\pi)$$

Logo:

$$h(x) = \left| \begin{array}{l} x,\ 0 < x \leqslant \pi/2, \\ 0,\ \pi/2 < x \leq \pi, \\ 0,\ x = 0, \\ x,\ \ -\pi/2 \leq x < 0, \\ 0,\ \ -\pi < x < -\pi/2. \end{array} \right. \quad ;\ h(x) = h(x + 2\pi) \qquad ((7))$$

$c)$

• Cálculo de b_n.

Temos que:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\ (x)\sin nx dx \Longrightarrow b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx dx \Longrightarrow b_n = -\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}. \qquad ((9))$$

Portanto, a série de Fourier da função g é da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx \qquad ((10))$$

3ª Questão:(valor 3.0)

$a)$ Considere:

$$u(x,t) = F(x)G(t) \text{ ou } u(x,t) = X(x)T(t). \qquad ((11))$$

De (11) obtemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= F(x)G\,'(t) \text{ ou } \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = X(x)T\,'(t)\ , \qquad ((12)) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= F\,''(x)G(t) \text{ ou } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = X\,''(x)T(t). \end{aligned}$$

Substituindo $(12)_1$ e $(12)_2$ em (1) resulta que:

$$F(x)G\,'(t) \ = 4F\,''(x)G(t) \text{ ou } X(x)T\,'(t) = 4X\,''(x)T(t). \tag{(13)}$$

Dividindo (13) por $F(x)G(t)$ ou $X(x)T(t)$ obtemos que:

$$\frac{G\,'(t)}{4G(t)} = \frac{F\,''(x)}{F(x)} = \sigma \text{ ou } \frac{T\,'(t)}{4T(t)} = \frac{X\,''(x)}{X(x)} = -\sigma. \tag{(14)}$$

De (14) resulta que as duas equações diferenciais associadas são da forma:

$$\left| \begin{array}{rl} F\,''(x) - \sigma F(x) = & 0 \\ G\,'(t) - 4\sigma G(t) = & 0 \end{array} \right. \tag{(15)}$$

ou,

$$\left| \begin{array}{rl} X\,''(x) + \sigma X(x) = & 0 \\ T\,'(t) + 4\sigma T(t) = & 0 \end{array} \right. \tag{(16)}$$

Resumo:

- Autovalores: 0 e n, com $n \in \mathbb{N}^*$
- Autofunções associadas aos autovalores acima: 1 e $\cos nx$, com $n \in \mathbb{N}^*$

$b1$) Solucao em $F(x)$ e $G(t)$
Das condições de fronteira temos que $u_x(0,t) = 0$. Então, tomando $0 = u_x(o,t) = F'(0)G(t)$ obtemos que $F'(0) = 0$ ou $G(t) = 0$, para todo $t > 0$. Como não nos interessam soluções nulas ao aplicar o Princípio da Superposição, temos que $F'(0) = 0$. De forma análoga a condição $u_x(\pi,t) = 0$ nos leva a $F'(\pi) = 0$.
Considere a equação $(15)_1$. Então a equação característica é da forma:

$$m^2 = \sigma \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} m_1 = \sqrt{\sigma}, \\ m_2 = -\sqrt{\sigma}. \end{array} \right. \tag{(17)}$$

De (17) e considerando a hipótese que devemos desprezar o caso em que as raízes
são reais e distintas devemos estudar os casos $\sigma = 0$ e $\sigma < 0$.

- Seja $\sigma = 0$. Então, de $(15)_1$ obtemos:

$$F(x) = c_1 + c_2 x. \tag{(18)}$$

De (18) resulta que:

$$F\,'(x) = c_2. \tag{(19)}$$

Substituindo $x = 0$ em (19) obtemos que:

$$F\,'(0) = c_2 \Longrightarrow c_2 = 0, \text{ por } (2)_1. \tag{(20)}$$

Observe que $c_2 = 0$ independente se $x = 0$ ou $x = \pi$. Portanto:

$$F(x) = c_1. \tag{(21)}$$

• Seja $\sigma < 0$ e $\sigma = -\lambda^2$, $\lambda > 0$. Então, de $(15)_1$ obtemos:

$$F(x) = d_1 \cos \lambda x + d_2 \sin \lambda x. \tag{(24)}$$

De (24) resulta que:

$$F\,'(x) = -\lambda d_1 \sin \lambda x + \lambda d_2 \cos \lambda x. \tag{(25)}$$

Substituindo $x = 0$ em (25) obtemos que:

$$F\,'(0) = \lambda d_2 \Longrightarrow d_2 = 0, \text{ por } (2)_1. \tag{(26)}$$

Substituindo $x = \pi$ em (25) obtemos que:

$$F\,'(\pi) = -\lambda d_1 \sin \lambda\pi \Longrightarrow \sin \lambda\pi = 0, \text{ por } (2)_1 \Longrightarrow \lambda = n, \; n = 1, 2, .., \text{ por } (2)_1. \tag{(27)}$$

Substituindo o valor de d_2 dado por (26) e o valor de λ dado por (27) em (24) resulta que:

$$F_n(x) = d_1 \cos nx, \;\; n = 1, 2, ... \qquad ((28))$$

$b2$) Solucao em $X(x)$ e $T(t)$

Das condições de fronteira temos que $u_x(0,t) = 0$. Então, tomando $0 = u_x(o,t) = X'(0)T(t)$ obtemos que $X'(0) = 0$ ou $T(t) = 0$, para todo $t > 0$. Como não nos interessam soluções nulas ao aplicar o Princípio da Superposição, temos que $X'(0) = 0$. De forma análoga a condição $u_x(\pi,t) = 0$ nos leva a $X'(\pi) = 0$.

Considere a equação $(16)_1$. Então a equação característica é da forma:

$$m^2 = -\sigma \Longrightarrow \left| \begin{array}{c} m_1 = \sqrt{-\sigma}, \\ m_2 = -\sqrt{-\sigma}. \end{array} \right. \qquad ((29))$$

De (29) e considerando a hipótese que devemos desprezar o caso em que as raízes

são reais e distintas devemos estudar os casos $\sigma = 0$ e $\sigma > 0$.

• Seja $\sigma = 0$. Então, de $(16)_1$ obtemos:

$$X(x) = c_1 + c_2 x. \qquad ((30))$$

De (30) resulta que:

$$X\,'(x) = c_2. \qquad ((31))$$

Substituindo $x = 0$ em (31) obtemos que:

$$X\,'(0) = c_2 \Longrightarrow c_2 = 0, \;\text{ por } (2)_1. \qquad ((32))$$

Observe que $c_2 = 0$ independente se $x = 0$ ou $x = \pi$. Portanto:

$$X(x) = c_1. \qquad ((33))$$

• Seja $\sigma > 0$ e $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0$. Então, de $(16)_1$ obtemos:

$$X(x) = d_1 \cos \lambda x + d_2 \sin \lambda x. \qquad ((34))$$

De (34) resulta que:

$$X\,'(x) = -\lambda d_1 \sin\lambda x + \lambda d_2 \cos\lambda x. \tag{(35)}$$

Substituindo $x = 0$ em (35) obtemos que:

$$X\,'(0) = \lambda d_2 \Longrightarrow d_2 = 0, \text{ por } (2)_1. \tag{(36)}$$

Substituindo $x = \pi$ em (35) obtemos que:

$$X\,'(\pi) = -\lambda d_1 \sin\lambda\pi \Longrightarrow \sin\lambda\pi = 0, \text{ por } (2)_1 \Longrightarrow \lambda = n, \; n = 1, 2, .., \text{ por } (2)_1. \tag{(37)}$$

Substituindo o valor de d_2 dado por (36) e o valor de λ dado por (37) em (34) resulta
que:

$$X_n(x) = d_1 \cos nx, \; n = 1, 2, ... \tag{(38)}$$

Resumo:

- Autovalores: 0 e n, com $n \in \mathbb{N}^*$
- Autofunções associadas aos autovalores acima: 1 e $\cos nx$, com $n \in \mathbb{N}^*$

$c1$) Solucao em $F(x)$ e $G(t)$
Considere $G(t)$.

Substituindo $\sigma = 0$ em $(15)_2$ obtemos:

$$G\,'(t) = 0 \Longrightarrow G(t) = k_1. \tag{(39)}$$

Substituindo $\sigma = -n^2$ em $(15)_2$ obtemos:

$$G\,'(t) + 4n^2 G(t) = 0 \Longrightarrow G_n(t) = k_2 e^{-4n^2 t}. \tag{(40)}$$

$c2$) Solucao em $X(x)$ e $T(t)$
Considere $T(t)$.

Substituindo $\sigma = 0$ em $(16)_2$ obtemos:

$$T\,'(t) = 0 \Longrightarrow T(t) = k_1. \qquad ((41))$$

Substituindo $\sigma = -n^2$ em $(16)_2$ obtemos:

$$T\,'(t) + 4n^2 T(t) = 0 \Longrightarrow T_n(t) = k_2 e^{-4n^2 t}. \qquad ((42))$$

$d1$) Solucao em $F(x) e G(t)$
Considere $u(x,t) = F(x)G(t)$.

Da hipótese que $u(x,t) = F(x)G(t)$, de (21) e (39) obtemos que a solução de $(1) + (2)$
associada ao autovalor $\sigma = 0$ que denotaremos por $u_0(x,t)$ é da forma:

$$u_0(x,t) = \frac{a_0}{2}, \text{ onde } \frac{a_0}{2} = c_1 k_1. \qquad ((43))$$

Por outro lado da hipótese que $u(x,t) = F(x)G(t)$, de (28) e (40) obtemos que a solução de
$(1) + (2)$ associada ao autovalor $\sigma = -n^2$ que denotaremos por $u_n(x,t)$ é da forma:

$$u_n(x,t) = K \cos nx e^{-4n^2 t}. \qquad ((44))$$

Portanto, uma candidata a solução de (1), (2) e (3) denotada por $u(x,t)$ é da forma:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_n(x,t),$$

ou equivalentemente,

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + K \cos nx e^{-4n^2 t}. \qquad ((45))$$

Substituindo $t = 0$ na equação (45) resulta que:

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + K \cos nx. \qquad ((46))$$

Mas, por (3) temos que:

$$u(x,0) = 3\cos 6x - 5\cos 10x. \qquad ((47))$$

Comparando (46) e (47) temos então que a solução de $u(x,t)$ de (1), (2) e (3) não é
dada por (45). Por outro lado sabemos que vale o princípio da superposição finita. Logo
é verdadeiro supormos que $u(x,t)$ é da forma:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n \cos nx e^{-4n^2 t}. \qquad ((48))$$

Substituindo $t = 0$ na equação (48) resulta que:

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} K_n \cos nx. \qquad ((49))$$

Mas, por (3) temos que:

$$u(x,0) = 3\cos 6x - 5\cos 10x. \qquad ((50))$$

Comparando (49) e (50) obtemos que:

$$\frac{a_0}{2} + K_1 \cos x + K_2 \cos 2x + .. + K_6 \cos 6x + .. + K_{10} \cos 10x + ..K_m \cos mx = 3\cos 6x - 5\cos 10x.$$

Logo:

$$a_0 = 0;\ n = 6 \text{ e } K_6 = 3;\ n = 10 \text{ e } K_{10} = -5;\ n \neq 6 \text{ e } n \neq 10 \Longrightarrow K_n = 0. \qquad ((51))$$

De (49) e (51) obtemos que:

$$u(x,t) = 3\cos 6xe^{-144t} - 5\cos 10xe^{-400t}. \qquad ((52))$$

$d2)$ Solucao em $F(x)$ e $G(t)$
Considere $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Da hipótese que $u(x,t) = X(x)T(t)$, de (33) e (41) obtemos que a solução de $(1) + (2)$
associada ao autovalor $\sigma = 0$ que denotaremos por $u_0(x,t)$ é da forma:

$$u_0(x,t) = \frac{a_0}{2}, \text{ onde } \frac{a_0}{2} = c_1 k_1. \qquad ((53))$$

Por outro lado da hipótese que $u(x,t) = X(x)T(t)$, de (38) e (42) obtemos que a solução de
$(1) + (2)$ associada ao autovalor $\sigma = -n^2$ que denotaremos por $u_n(x,t)$ é da forma:

$$u_n(x,t) = K \cos nxe^{-4n^2 t}. \qquad ((54))$$

Portanto, uma candidata a solução de (1), (2) e (3) denotada por $u(x,t)$ é da forma:

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_n(x,t),$$

ou equivalentemente,

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + K \cos nxe^{-4n^2 t}. \qquad ((55))$$

Substituindo $t = 0$ na equação (55) resulta que:

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + K \cos nx. \qquad ((56))$$

Mas, por (3) temos que:

$$u(x,0) = 3\cos 6x - 5\cos 10x. \qquad ((57))$$

Comparando (56) e (57) temos então que a solução de $u(x,t)$ de (1), (2) e (3) não é
dada por (55). Por outro lado sabemos que vale o princípio da superposição finita. Logo
é verdadeiro supormos que $u(x,t)$ é da forma:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} K_n \cos nx e^{-4n^2 t}. \qquad ((58))$$

Substituindo $t = 0$ na equação (58) resulta que:

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} K_n \cos nx. \qquad ((59))$$

Mas, por (3) temos que:

$$u(x,0) = 3\cos 6x - 5\cos 10x. \qquad ((60))$$

Comparando (59) e (60) obtemos que:

$$\frac{a_0}{2} + K_1 \cos x + K_2 \cos 2x + .. + K_6 \cos 6x + .. + K_{10} \cos 10x + .. K_m \cos mx = 3\cos 6x - 5\cos 10x.$$

Logo:

$$a_0 = 0;\ n = 6 \text{ e } K_6 = 3;\ n = 10 \text{ e } K_{10} = -5;\ n \neq 6 \text{ e } n \neq 10 \Longrightarrow K_n = 0. \qquad ((61))$$

De (58) e (61) obtemos que:

$$u(x,t) = 3\cos 6x e^{-144t} - 5\cos 10x e^{-400t}. \qquad ((62))$$

4ª Questão:(valor 2.5)

(i) Considere o problema de valor de contorno dado abaixo:

(4) $H''(x) - \sigma H(x) = 0;\ 0 < x < 2,$
(5) $H(0) = H(2) = 0.$

De (4) temos que a equação característica é da forma:

$$m^2 = \sigma \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} m_1 = \sqrt{\sigma}, \\ m_2 = -\sqrt{\sigma}. \end{array} \right.$$

Caso 1 : Considere $\sigma > 0$.

Da equação acima e de (4) obtemos:

$$H(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}.$$

Substituindo $x = 0$ em $H(x)$ resulta que:

$$H(0) = c_1 + c_2 = 0, \text{ por } (5)_1 \Longrightarrow c_2 = -c_1.$$

Substituindo $x = 2$ em $H(x)$ e do fato que $c_2 = -c_1$ resulta:

$$H(2) = c_1 e^{2\sqrt{\sigma}} - c_1 e^{-2\sqrt{\sigma}} = 0, \text{ por } (5)_2 \Longrightarrow c_1 = c_1 e^{-4\sqrt{\sigma}} \Longrightarrow \sigma = 0 \text{ ou } c_1 = 0.$$

Como, pela hiptese do caso, $\sigma > 0$, temos que $c_1 = 0$ e daí concluímos que:

$$H(x) = 0. \tag{(63)}$$

Caso 2 : Considere $\sigma = 0$.

De (4) e de que $m_1 = m_2 = 0$ obtemos:

$$H(x) = c_1 + c_2 x.$$

Substituindo $x = 0$ em $H(x)$ resulta que:

$$H(0) = c_1 = 0, \text{ por } (5)_1.$$

Substituindo $x = 2$ em $H(x)$ e do fato que c_1 =0 obtemos:

$$H(2) = 2c_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0, \text{ por } (5)_2.$$

Do exposto concluímos que:

$$H(x) = 0. \tag{(67)}$$

Caso 3 : Considere $\sigma < 0$. Suponha que $\sigma = -\lambda^2$, $\lambda > 0$.

De (4) e de que $m_1 = \lambda i$ e $m_2 = -\lambda i$ obtemos:

$$H(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Substituindo $x = 0$ em $H(x)$ resulta que:

$$H(0) = c_1 = 0, \text{ por } (5)_1.$$

Substituindo $x = 2$ em $H(x)$ e do fato que c_1 =0 obtemos:

$$H(2) = c_2 \sin 2\lambda = 0, \text{ por } (5)_2 \Longrightarrow c_2 = 0 \text{ e ou } \sin 2\lambda = 0 \Longrightarrow 2\lambda = n\pi \Longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2}.$$

Disto resulta que se:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \Longrightarrow H(x) = 0, \\ \sin 2\lambda &= 0 \Longrightarrow H_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{2}, \end{aligned} \tag{(68)}$$

com $n \in \mathbb{N}^*$ pois $\lambda > 0$

(ii) Considere o problema de valor de contorno dado abaixo:

(4) $H''(x) + \sigma H(x) = 0; 0 < x < 2,$
(5) $H(0) = H(2) = 0.$

De (4) temos que a equação característica é da forma:

$$m^2 = -\sigma \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} m_1 = \sqrt{-\sigma}, \\ m_2 = -\sqrt{-\sigma}. \end{array} \right.$$

Caso 1 : Considere $\sigma < 0$.

Da equação acima e de (4) obtemos:

$$H(x) = c_1 e^{\sqrt{-\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\sigma}x}.$$

Substituindo $x = 0$ em $H(x)$ resulta que:

$$H(0) = c_1 + c_2 = 0, \text{ por } (5)_1 \Longrightarrow c_2 = -c_1.$$

Substituindo $x = 2$ em $H(x)$ e do fato que $c_2 = -c_1$ resulta:

$$H(2) = c_1 e^{2\sqrt{-\sigma}} - c_1 e^{-2\sqrt{-\sigma}} = 0, \text{ por } (5)_2 \Longrightarrow c_1 = c_1 e^{-4\sqrt{-\sigma}} \Longrightarrow \sigma = 0 \text{ ou } c_1 = 0.$$

Como, pela hiptese do caso, $\sigma > 0$, temos que $c_1 = 0$ e daí concluímos que:

$$H(x) = 0. \qquad ((69))$$

Caso 2 : Considere $\sigma = 0$.

De (4) e de que $m_1 = m_2 = 0$ obtemos:

$$H(x) = c_1 + c_2 x.$$

Substituindo $x = 0$ em $H(x)$ resulta que:

$$H(0) = c_1 = 0, \text{ por } (5)_1.$$

Substituindo $x = 2$ em $H(x)$ e do fato que c_1 =0 obtemos:

$$H(2) = 2c_2 = 0 \Longrightarrow c_2 = 0, \text{ por } (5)_2.$$

Do exposto concluímos que:

$$H(x) = 0. \qquad ((70))$$

Caso 3 : Considere $\sigma > 0$. Suponha que $\sigma = \lambda^2$, $\lambda > 0$.

De (4) e de que $m_1 = \lambda i$ e $m_2 = -\lambda i$ obtemos:

$$H(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Substituindo $x = 0$ em $H(x)$ resulta que:

$$H(0) = c_1 = 0, \text{ por } (5)_1.$$

Substituindo $x = 2$ em $H(x)$ e do fato que c_1 =0 obtemos:

$$H(2) = c_2 \sin 2\lambda = 0, \text{ por } (5)_2 \Longrightarrow c_2 = 0 \text{ e ou } \sin 2\lambda = 0 \Longrightarrow 2\lambda = n\pi \Longrightarrow \lambda = \frac{n\pi}{2}.$$

Disto resulta que se:

$$\begin{aligned} c_2 &= 0 \Longrightarrow H(x) = 0, \qquad ((71)) \\ \sin 2\lambda &= 0 \Longrightarrow H_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{2}., \end{aligned}$$

com $n \in \mathbb{N}^*$ pois $\lambda > 0$