Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — 2ª Prova Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias 1º Sem/2011

Código: MAC 248 — **Data**: 28/06/2011

---

1. (2,5 p) Encontre os autovalores e autofunções do problema de valores de contorno dado

$$y'' + \lambda\, y = 0, \qquad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \tag{1}$$

Descreva todos os casos envolvidos no discriminante da equação característica associada à equação diferencial (1).

2. (2,5 p) Seja $f(x) = \text{sen} x$ se $0 \le x \le \pi$. Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} f(2\pi - x) & se \quad \pi < x < 2\pi, \\ f(x) & se \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases} \tag{2}$$

   (a) (1,5 p) Ache a série de Fourier da extensão ímpar $\widetilde{g}_i(x)$ de $g(x)$ definida em (2), suponha que $\widetilde{g}_i(x + 4\pi) = \widetilde{g}_i(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$;

   (b) (1,0 p) Esboçe o gráfico da série obtida no item 2a no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

3. (2,5 p) Encontre a solução da equação do calor $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, $\quad 0 < x < L, \quad t > 0$, que satisfaz o conjunto dado de condições de contorno e temperatura inicial

$$\begin{cases} u(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = x, \quad 0 < x < L. \end{cases} \tag{3}$$

4. (2,5 p) Encontre a solução $u(x, y)$ da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ na faixa semi-infinita $R = (0,\infty) \times (0,b)$, que satisfaz as condições de contorno

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,b) = 0, \ x > 0, \\ u(0,y) = 100, \quad 0 < y < b. \end{cases} \tag{4}$$

Suponha que $u(x,y)$ é limitada quando $x \to \infty$.

ver fórmulas **NO VERSO**

Fórmulas :.

1. A série de Fourier de $f(x)$ é dada

$$s(x;f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \mathrm{sen}(\frac{n\pi}{L}x), \tag{5}$$

2. Identidades trigonométricas:

   - $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \mathrm{sen} A \mathrm{sen} B$,
   - $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \mathrm{sen} A \mathrm{sen} B$.

3. Integração por partes

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left. f(x)g(x)\right|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx \tag{6}$$

4. Lembre que o PVC:

$$\begin{cases} y'' + \lambda\, y = 0, & 0 < x < L, \\ y(0) = 0, & y(L) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

   tem as soluções:

   - $\lambda_n = \{\frac{n\pi}{L}\}^2$,
   - $y_n(x) = \mathrm{sen}(\frac{n\pi\, x}{L})$.

Professores: Carlos Ferraris, I Shih, Katrin Gelfert, Pedro Gamboa, Xavier Carvajal.