INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

2ª Prova Unificada de Cálculo IV – MAC 248

Escola Politécnica / Escola de Química

01/12/2010

1ª Questão: (2.0 pts)

Resolva o problema de contorno:

$$\begin{cases} x^2y'' - 6xy' + 10y = 0, \quad x > 0 \\ y(1) = 1, \;\; y(2) = 18. \end{cases}$$

2ª Questão: (3.0 pts)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de perído 2π tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0, \\ 2 & \text{se } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

(a) Determine a série de Fourier de $f(x)$;

(b) Determine o conjunto D dos pontos de $\mathbb{R}$ para os quais a série de Fourier de f converge e calcule o valor do limite da série em cada ponto de D;

(c) Dê a expressão da função g periódica de perído 2π que coincide com f no intervalo $0 < x < \pi$, mas que sua série de Fourier contenha **somente** termos em senos.

3ª Questão: (2.0 pts)

Usando o método de separação de variáveis, determine a solução geral da equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \;\; 0 < x < \pi, \;\; t > 0,$$

com condições de contorno do tipo misto:

$$u(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = 0.$$

4ª Questão: (3.0 pts)

Usando o método de separação de variáveis, determine a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \;\; t \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = 0, \\ u(0, x) = x^2, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Formulário no verso

Formulário

$$\int x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = \frac{L}{n\pi}x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + C$$

$$\int x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = -\frac{L}{n\pi}x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + C$$

$$\int x^2\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = \frac{L}{n\pi}x^2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) - \frac{2L^3}{n^3\pi^3}\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}\right) + C$$

$$\int x^2\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,dx = -\frac{L}{n\pi}x^2\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}x\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{2L^3}{n^3\pi^3}\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) + C$$