Questão 1: (2.5 pontos)

Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ -2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

(a) (0.8 ponto) Seja $\tilde{f}$ a extensão impar e períodica de período 4 da função f. Esboce o gráfico de $\tilde{f}$ no intervalo $[-2, 4]$.

(b) (1.0 ponto) Encontre a série de Fourier de $\tilde{f}$.

(c) (0.7 ponto) Escreva a série do item (b) no ponto $x = 1$ e ache a sua soma.

Questão 2: (2.0 pontos)

Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF)

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = 2, \quad u(1,t) = 3, & t \geq 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

que representa a distribuição de temperatura numa barra.

(a) (1.0 ponto) Determine a temperatura estacionária (ou permanente ou de equilibrio) $v(x)$ da barra.

(b) (1.0 ponto) Considerando $w(x,t) = u(x,t) - v(x)$, encontre o Problema de Valor Inicial e de Fronteira que a função w deverá satisfazer.

Questão 3: (2.5 pontos)

Considere o seguinte problema

$$u_{tt} - u_{xx} - 4u_x = 0, \qquad 0 < x < 2, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \qquad t \geq 0. \tag{2}$$

(a) (1.0 ponto) Usando o método de separação de variáveis, explicite as duas equações diferenciais ordinárias associadas a equação (1).

(b) (1.5 ponto) Utilizando (2), obtenha todos os autovalores e as respectivas autofunções do problema de contorno correspondente a equação diferencial ordinária na variável x.

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere o seguinte problema para a equação de Laplace

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0, \qquad 0 < r < 3, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

$$u(r,0) = 0, \quad u(r,\frac{\pi}{2}) = 0, \qquad 0 \leq r \leq 3, \tag{4}$$

$$u(3,\theta) = 4\text{sen}(8\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

(a) (2.3 pontos) Supondo que $u(r,\theta)$ seja uma função limitada, use o método de separação de variáveis e obtenha a solução $u(r,\theta)$ em série que satisfaz a E.D.P. (3) e a condição de fronteira (4).

(b) (0.7 ponto) Analisando a condição de fronteira (5) encontre a solução do problema que satisfaz (3), (4) e (5).

LEMBRETES NO VERSO

Lembretes:

1. Integrais.

   - $\int x\text{sen}(ax)dx = \frac{1}{a^2}\text{sen}(ax) - \frac{x}{a}\cos(ax)$.
   - $\int x\cos(ax)dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\text{sen}(ax)$.

2. Tabela resumo para EDO de 2ª ordem com coeficientes constantes: $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

   - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 \neq r_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$.
   - $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ e $r_1 = r_2 \quad \Rightarrow \quad y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_1 x}$.
   - $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_1 = \alpha - \beta i \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos(\beta x) + c_2\text{sen}(\beta x))$.

3. Equação de Euler: $r^2 y''(r) + \alpha r y'(r) + \beta y(r) = 0$.

   - equação indicial: $m^2 + (\alpha - 1)m + \beta = 0$,
   - raizes: m_1 e m_2 reais,
   - solução:

$$\begin{aligned} m_1 \neq m_2 \quad &\Rightarrow \quad y(r) = c_1 r^{m_1} + c_2 r^{m_2}. \\ m_1 = m_2 \quad &\Rightarrow \quad y(r) = (c_1 + c_2 \ln r) r^{m_1}. \end{aligned}$$