Questão 1: (2.5 pontos)
Seja f a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < 3. \end{cases} \qquad : f(x+6) = f(x)$$

(a) (1.0 ponto) Determine a Série de Fourier da função f

(b) (0.7 ponto) Esboce o gráfico da função para a qual a Série de Fourier converge no intervalo $[-9, 9]$. Justifique adequadamente.

(c) (0.8 ponto) Utilize o item (a) e o Teorema de Fourier para mostrar que $\dfrac{\pi^2}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2}$

Questão 2: (2.0 pontos)
Obtenha todos os autovalores λ e respectivas autofunções $y(x)$ do problema de autovalor abaixo:

$$(I) \begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + \lambda y(x) = 0; \quad 0 < x < 1, & \text{(2a)} \\ y(0) = y(1) = 0. & \text{(2b)} \end{cases}$$

Questão 3: (2.5 pontos)
Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$(I) \begin{cases} u_t(x,t) - 4u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < 2, \quad t > 0, & \text{(3a)} \\ u(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad u(2,t) = 4, & t > 0, & \text{(3b)} \\ u(x,0) = 2x - 3\,\text{sen}\, 3\pi x - 7\,\text{sen}\, 7\pi x, & 0 < x < 2. & \text{(3c)} \end{cases}$$

(a) (0.3 ponto) Encontre a função $v(x)$ que satisfaz as condições de fronteira (3b) e $v_{xx} = 0$.

(b) (0.7 ponto) Seja $w(x,t) := u(x,t) - v(x)$. Encontre o Problema de Valor Inicial e de Fronteira que $w(x,t)$ deverá satisfazer

(c) (1.0 ponto) Encontre função $w(x,t)$ solução do problema do item (b). Utilize, se necessário, o lembrete ao final desta questão.

(d) (0.5 ponto) Encontre a solução $u(x,t)$

Lembrete: Sabemos que a solução geral do problema abaixo

$$(II) \begin{cases} w_t(x,t) - \alpha^2 w_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ w(0,t) = w(l,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

é dada por $w(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}}\, \text{sen}\, \frac{n\pi x}{l}$

Questão 4: (3.0 pontos)
Considere o Problema de Valor Inicial e de Fronteira (PVIF):

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - 9u_{xx}(x,t) = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, & \text{(4a)} \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, & \text{(4b)} \\ u(x,0) = x, & 0 < x < \pi, & \text{(4c)} \\ u_t(x,0) = 5\cos 2x, & 0 < x < \pi. & \text{(4d)} \end{cases}$$

(a) (1.5 ponto) Utilizando o Método da Separação de Variáveis, obtenha as equações diferenciais ordinárias nas variáveis x e t e as resolva, detalhando todas as etapas.

(b) (0.5 ponto) Obtenha a solução em série que satisfaz a EDP (4a) e as condições de fronteira (4b)

(c) (1.0 ponto) Analisando as condições iniciais do PVIF (4c) e (4d), obtenha a solução do problema dado.

Formulário:

- Algumas integrais úteis:

$$\int_a^b x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{l} = \left(-\frac{lb}{n\pi}\cos\frac{n\pi b}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi b}{l}\right) - \left(-\frac{la}{n\pi}\cos\frac{n\pi a}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{l}\right)$$

$$\int_a^b x \cos \frac{n\pi x}{l} = \left(\frac{lb}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi b}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi b}{l}\right) - \left(\frac{la}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi a}{l} + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi a}{l}\right)$$

- Tabela resumo para EDO de segunda ordem com coeficientes constantes. Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica. Então:

$$\begin{aligned}
r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 \neq r_2 \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\
r_1,\, r_2 \in \mathbb{R} \text{ e } r_1 = r_2 \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x} \\
r_1 = \alpha + \beta i,\, r_2 = \alpha - \beta i \quad &\Longrightarrow \quad y(x) = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \operatorname{sen} \beta x].
\end{aligned}$$

Regras:

- Duração da prova: 150 minutos
- Não é permitido (nem necessário) o uso de calculadoras, consulta a qualquer fonte e nem se ausentar da sala por qualquer motivo.
- Mantenham os celulares e similares desligados e dentro das bolsas/mochilas. As bolsas e mochilas deverão ser guardadas na mesa do professor ou junto ao quadro em local afastado do aluno.