Questão 1: (2.0 pontos)
Quanto às séries abaixo pede-se:

a. classificar em convergente ou divergente a série númerica $\sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$;

b. classificar em condicionalmente convergente, absolutamente convergente ou divergente a série $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{1}{\ln(n)}$;

c. determinar o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^{n^2}$.

Observação: justifique todas as suas afirmações.

Solução:

a. Sejam $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$ e $b_n = \frac{2}{n^2}$. Notemos que $0 < a_n \leq b_n$ para todo $n \geq 2$. Como $\sum b_n$ é uma p-série para $p = 2$, a série $\sum b_n$ converge. Portanto, $0 < \sum a_n \leq \sum b_n$ e também convergirá $\sum a_n$. A convergência absoluta decorre do fato de todos os termos a_n serem positivos.

b. Comecemos por analisar a convergência absoluta. Para n suficientemente grande (por exemplo $n \geq 10$), $\frac{1}{\ln(n)} \geq \frac{1}{n}$. Usando que a série harmônica diverge ($\sum \frac{1}{n} = +\infty$), a série $\sum \frac{1}{\ln(n)} \geq \sum \frac{1}{n} = +\infty$ diverge. Logo, $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n)}$ diverge em carater absoluto.

Façamos $a_n = \frac{1}{\ln(n)}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Como $\ln(n) < \ln(n+1)$ e $\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty$, segue que $a_n \geq a_{n+1}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Temos assim uma série alternada. Pelo teste de série alternada, a série $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n)}$ é convergente. Concluímos que $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n)}$ é condicionalmente convergente.

c. Definamos $a_n = n! x^{n^2}$. Notemos que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!|x|^{(n+1)^2}}{n!|x|^{n^2}} = (n+1)|x|^{2n+1}$. Para $|x| \geq 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, enquanto que para $|x| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ (compare com o assintota horizontal da função te^{-t}). O raio de convergência R é então $R = 1$.

Questão 2: (3.0 pontos)
Determine uma solução em série para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' + xy' - 25y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \end{cases}$$

e determine o raio de convergência da solução.

Solução:
O ponto $x = 0$ é um ponto regular, então podemos supor que uma solução definida ao redor de 0 é da forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Assim, substituindo-se as derivadas de $y(x)$ na equação diferencial, obtemos

$$(2a_2 - 25a_0) + (6a_3 + a_1 - 25a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + na_n - 25a_n\Big]x^m = 0,$$

que nos dá as seguintes relações de recorrências

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{25}{2}a_0 \\ a_3 &= 4a_1 \\ a_{n+2} &= \frac{-(n^2-25)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad \text{para} \;\; n \geq 2. \end{aligned}$$

Se $y(0) = 0$ então $a_0 = 0$ e logo $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0$. Se $y'(0) = 1$ então $a_1 = 1$ e

$$\begin{aligned} a_3 &= 4 \\ a_5 &= \frac{-(9-25)}{20}\cdot 4 = \frac{16}{5} \\ a_7 &= \frac{-(25-25)}{7\cdot 6}\cdot a_5 = 0 \\ a_9 &= a_{11} = \cdots = 0. \end{aligned}$$

Então, $y(x) = x + 4x^3 + \frac{16}{5}x^5$. Como a solução é polinomial, o raio de convergência é $R = +\infty$

Questão 3: (3.0 pontos)

Consideremos uma mola elástica fixada por uma de suas extremidades e que possa vibrar na vertical. Suponhamos que um corpo de massa $m = 1$ quilograma esteja preso à extremidade inferior da mola, que a constante elástica da mola seja $k = 1$ e que no instante $t = 0$ o sistema seja submetido a uma força periódica $f(t) = \text{sen}(2t)$. No instante $t = 1$, o sistema massa-mola recebe por baixo um golpe brusco que comunica instantaneamente 5 unidades de momento ao sistema. Usando a segunda lei de Newton e o eixo y convenientemente posicionado, somos levados à seguinte equação do movimento $y(t)$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \text{sen}(2t) + 5\delta(t-1).$$

Supondo as condições iniciais $y(0) = y'(0) = 0$, determine o movimento do sistema.

Solução:

A transformada de Laplace da equação diferencial nos fornece a seguinte equação:

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}(y)(s) + \mathcal{L}(y)(s) &= \frac{2}{s^2+4} + 5e^{-s} \\ \mathcal{L}(y)(s) &= \frac{2}{(s^2+1)(s^2+4)} + 5\frac{1}{s^2+1}e^{-s} \\ &= \frac{2}{3}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3}\frac{2}{s^2+4} + 5\frac{1}{s^2+1}e^{-s}. \end{aligned}$$

A solução $y(t)$ é dada por $y(t) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(y))$. Portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(y)) \\ &= \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) + 5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}e^{-s}\right) \\ &= \frac{2}{3}\text{sen}(t) - \frac{1}{3}\text{sen}(2t) + 5u_1(t)\cdot\text{sen}(t-1). \end{aligned}$$

Questão 4: (2.0 pontos)

Determine os valores de α para os quais todas as soluções de

$$x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$$

tendem a zero quando x tende ao infinito.

Solução:

A equação diferencial $x^2y'' + \alpha xy' + \frac{5}{2}y = 0$ é uma Equação de Euler. Logo, se supusermos que a solução seja da forma $y(x) = x^r$, obtemos a equação característica

$$2r^2 + 2(\alpha-1)r + 5 = 0.$$

As raízes da equação característica são dadas por

$$r_+ = \frac{-(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 10}}{2}, \quad r_- = \frac{-(\alpha-1) - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 10}}{2}.$$

Caso 1. $r_+ \neq r_-$ são números reais distintos. Para que este caso ocorra devemos ter $(\alpha-1)^2 - 10 > 0$. Portanto, devemos ter $\alpha > 1 + \sqrt{10}$ ou $\alpha < 1 - \sqrt{10}$ A solução geral no caso de raízes reais diferentes é

$$y(x) = C_1x^{r_+} + C_2x^{r_-}.$$

Ela tenderá a zero quando x tender ao infinito se, e somente se, $0 > r_+ > r_-$. Temos assim que

$$\begin{aligned} -(\alpha-1) + \sqrt{(\alpha-1)^2 - 10} &< 0 \\ -(\alpha-1) - \sqrt{(\alpha-1)^2 - 10} &< 0. \end{aligned}$$

Somando as duas inequações, obtemos $\alpha > 1$. A intersecção das três inequações é $\left\{\alpha \mid \alpha > 1 + \sqrt{10}\right\}$

Caso 2. r_+ e r_- são números reais iguais. Neste caso $\alpha = 1 + \sqrt{10}$ ou $\alpha = 1 - \sqrt{10}$ e as raízes são $r_+ = r_- = r = \frac{-(\alpha-1)}{2}$. A solução geral é da forma

$$y(x) = (c_1 + c_2\ln(x))\,x^r.$$

A solução geral $y(x)$ tenderá a zero quando x tender ao infinito se, e somente se, $r < 0$. Como $r < 0$ implica em $\alpha > 1$, obtemos $\alpha = 1 + \sqrt{10}$.

Caso 3. $r_+ = \lambda + i\mu$ e $r_- = \lambda - i\mu$ são números reais complexos conjugados, em que $\lambda = \frac{-(\alpha-1)}{2}$ e $\mu = \frac{1}{2}\sqrt{1-(\alpha-1)^2}$. Para este caso $1-\sqrt{10} < \alpha < 1+\sqrt{10}$. A solução geral da equação diferencial tem a forma

$$y(x) = \left(c_1 \cos(\mu \ln(x)) + c_2 \text{sen}(\mu \ln(x))\right) x^{\lambda}.$$

Todas as soluções reais tendem para zero quando x tende para o infinito se, e somente se, $\lambda < 0$. Isto é, se $1 < \alpha < 1+\sqrt{10}$.

A união dos três casos nos dá $\alpha > 1$.