Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — Gabarito da 1º Prova
Unidades: Escola Politécnica e Escola de Quimica — **Turmas**: Engenharias 2^o Sem/2012
Código: MAC 248 — **Data**: 18/12/2012

---

(1) (2,0 p) Analise a convergência das séries abaixo indicadas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n\sqrt{n}}$, (1,0 p)

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2+5)}{n^3+1}$, (1,0 p)

Resposta:

a) Seja $b_n = \frac{\cos(n\theta)}{n\sqrt{n}}$ $\quad \forall\, n \geq 1$ logo

$$|b_n| = |\frac{\cos(n\theta)}{n\sqrt{n}}| \leq c_n, \quad \forall\, n \geq 1 \text{ e } \forall\, \theta \in \mathbb{R}$$

onde $c_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Observemos que a série associada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge pois é uma série $p-$ Harmônica (ou p-série) com $p = 3/2 > 1$ logo convergente. Então pelo critério de comparação, temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

converge. Por propriedades das séries abs. convergentes afirmamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

converge.

b) Seja $b_n = \frac{(-1)^n(n^2+5)}{n^3+1}$. Observemos que

$$|b_n| = \frac{n^2+5}{n^3+1} = \frac{n^2(1+5/n^2)}{n^3(1+1/n^3)} = \frac{1}{n}\frac{(1+5/n^2)}{(1+1/n^3)},$$

considerando a sequência $d_n = \frac{1}{n}$ e lembrando que a série associada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ diverge e tomando limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|b_n|}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+5/n^2)}{(1+1/n^3)} = 1 > 0,$$

aplicando o critério de comparação por limite, ambas séries divergem, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

diverge.
Agora olhemos a série como uma série numérica alternada. Usaremos o Critério de Leibniz para mostrar que ela é convergente, isto é, precisamos mostrar que:
i) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, e
ii) $b_{n+1} \leq b_n$.
Para mostrar i), tomemos limite na função $f(x) = \frac{(x^2+5)}{(x^3+1)}$ quando $x \to \infty$, aplicando a regra de L'Hôspital, pois os polinômios são diferenciáveis, obtemos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty x} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3x} = 0$$

logo

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = 0$$

Em relação a ii) podemos concluir que, é de fato verdade, se mostrarmos que a derivada da função $\{\frac{(x^2+5)}{x^3+1}\}$ é negativa para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Verificaremos esta última afirmação abaixo:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x^2+5)}{(x^3+1)}\right] = -\frac{x^4+15x^2-2x}{(x^3+1)^2} < 0, \quad \text{se } x \geq 1,$$

pois o denominador é positivo para todo x real. Enquanto o numerador é claramente negativo para todo $x \geq 1$.
Podemos concluir que a série é condicionalmente convergente.

(2) (2,5 p) Responda as seguintes questões:

(a) Sabendo que a função $ln\,(1+x)$ é analítica para $|x| < 1$, mostre que:

$$ln\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \cdots, |x| < 1$$

(b) Seja $s(x)$ a soma da série $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^4}{4.3} - \frac{x^5}{5.4} + \cdots, |x| < 1$. Determine a função $s(x)$ em termos de funções elementares. Justifique (1,2 p)

Resposta:

a) Usando séries geométricas, obtemos que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n, \quad \text{abs.convergente} \quad |x| < 1$$

como x^n são continuas em $|x| < 1$. Então

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\, dt,$$

o qual é equivalente a

$$\int_0^x (\ln(1+t))' dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

Pelo Teorema fundamental do cálculo

$$\ln(1+x) - \ln 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \forall\, |x| < 1.$$

Seja $f(x) = \ln(1+x)$ derivando, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{1+x}, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\tfrac{1}{(1+x)^2}, & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= (-1)^2 \tfrac{2}{(1+x)^3}, & f'''(0) &= (-1)^2 2 \\ f^{iv}(x) &= (-1)^3 \tfrac{2.3}{(1+x)^4}, & f^{iv}(0) &= (-1)^{4-1} 1.2.(4-1). \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

como $a_n = \dfrac{f^n(0)}{n!}$ podemos concluir que $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Além disso, a função $f(x)$ é analítica em $|x| < 1$ logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n = f(x).$$

b) Seja $s(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3.2} + \frac{x^4}{4.3} - \frac{x^5}{5.4} + \cdots$ abs. convergente $|x| < 1$. Como $s(x)$ é analítica em torno de 0, derivemos

$$\begin{aligned} s'(x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^4}{4} + \cdots \\ &= \ln(1+x), \end{aligned}$$

integrando

$$\textstyle\int_0^x s'(t)dt = \int_0^x \ln(1+t)dt,$$

$$s(x) - s(0) = t\ln(1+t)|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t} dt$$

$$s(x) - s(0) = t\ln(1+t)|_0^x - x + \ln(1+x), \quad \forall\, |x| < 1$$

onde dada a contínuidade da soma $s(x)$ temos que $s(0) = 0$.

(3) (3,0 p) Considere a equação diferencial de Tchebycheff

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Sabendo que $y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$ é a solução geral da equação por série em torno do ponto $x_0 = 0$.

(a) Determine uma cota inferior para o raio de convergência das soluções em série $y_1(x)$ e $y_2(x)$ linearmente independentes da equação em torno de $x_0 = 0$.
(b) Determine a relação de recorrência. Justifique. (1,3 p)
(c) Determine a solução geral da equação de Tchebycheff. Justifique. (1,2 p)

Resposta:

a) Sejam $a(x) = 1 - x^2$, $b(x) = -x$ e $c(x) = \alpha^2$, sem fatores comuns e $\alpha \in \mathbb{R}$. Para encontrar a cota inferior dos raios das soluções da equação, obteremos os raios das funções $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ e de $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$, isto é, para $x_0 = 0$

$$R_p = min\{||z - x_0||;\ a(z) = 0\}$$

neste caso $z = \pm 1$ tomando distância, obtemos $||z - x_0|| = 1$. Logo $R_p = 1$. Analogamente, $R_q = 1$. Portanto, a cota inferior será

$$R = min\{R_p, R_q\} = 1.$$

b) Mostremos que o ponto $x_0 = 0$ é um ponto ordinário da equação. Observemos que

$$\frac{1}{1 - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \quad \text{abs.conv.} \quad |x| < 1$$

logo

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1) x^{2n+1} \quad \text{abs.conv.} \quad |x| < 1$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^2 x^{2n} \quad \text{abs.conv.} \quad |x| < 1,$$

então p, q são funções analíticas em torno de $x_0 = 0$.
Aplicando o Teorema das soluções para ponto ordinário, toda solução será da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{abs.conv.} \quad |x| < R, \tag{2}$$

substituindo (2)em (1), obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{\, (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n + \alpha^2 a_n \,\} x^n = 0, \qquad \forall |x| < R, \tag{3}$$

o que é equivalente a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0, \qquad \forall |x| < R, \tag{4}$$

onde

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2 - \alpha^2)\, a_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Por propriedades das séries abs.convergentes e (4), obtemos

$$b_n = 0, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

o que nós leva a obter a relação de recorrência

$$a_{n+2} = \frac{(n^2 - \alpha^2)}{(n+2)(n+1)} a_n, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

c) Calculemos os coeficientes a_n de indice par:

$$n=0, \qquad a_2 = \frac{-\alpha^2}{2.1}a_0,$$
$$n=2, \qquad a_4 = \frac{(2^2-\alpha^2)(-\alpha^2)}{4!}a_0$$
$$\ldots$$

o que nos leva a

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\alpha^2(\alpha^2-2^2)\cdots[\alpha^2-(2n-2)^2]}{(2n)!}a_0, \ \forall n \geq 1. \tag{6}$$

Calculemos os coeficientes a_n de indice ímpar:

$$n=1, \qquad a_3 = \frac{1-\alpha^2}{3.2}a_1,$$
$$n=3, \qquad a_5 = \frac{(3^2-\alpha^2)(1-\alpha^2)}{5!}a_1$$
$$\ldots$$

o que nos leva a

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n(\alpha^2-1)(\alpha^2-3^2)\cdots[\alpha^2-(2n+1)^2]}{(2n+1)!}a_1, \ \forall n \geq 1. \tag{7}$$

Definamos as soluções usando (2)

(a) $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}x^{2n}$$

onde a_{2n} estão definidas em (6).

(b) $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$:

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Portanto, a solução geral da equação (1) é da forma

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x),$$

sendo c_1 e c_2 constantes arbitrárias.

(4) (2,5 p) Considere a função

$$g(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t > \pi \end{cases}$$

Resolva o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} y'' + 4y = g(t) + \delta(t - \frac{\pi}{2}) \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Justifique sua resposta.

Resposta:

Observemos que a função g pode ser representada em termos de funções de grau, isto é,

$$g(t) = \text{sen}t - u_\pi(t)\text{sen}t = \text{sen}t + u_\pi \text{sen}(t-\pi) \tag{9}$$

Aplicando transformada de Laplace em g e usando o Teorema de translação na variável t, obtemos

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{\text{sen}t\} + \mathcal{L}\{u_\pi(t)\text{sen}(t-\pi)\} = \frac{1}{s^2+1} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}. \tag{10}$$

Agora apliquemos a transformada de Laplace na equação (8)

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{g(t)\} + \mathcal{L}\{\delta(t-\frac{\pi}{2})\}.$$

Logo resolvendo a equação algebrica, obtemos

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)} + \frac{e^{-\pi s/2}}{(s^2+4)}. \tag{11}$$

Considere a função $H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}$. Vamos calcular $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$. Usando frações parciais, reescrevemos

$$H(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{s^2+4}\right).$$

Logo,

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{3}\text{sen}t - \frac{1}{6}\text{sen}2t.$$

Além disso, seja

$$G(s) = \frac{e^{-\pi s/2}}{(s^2+4)}$$

Aplicando transformada de Lapace inversa, obtemos

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-\pi s/2}}{(s^2+4)}\} \\ &= z(t-\pi/2)u_{\pi/2}(t), \end{aligned}$$

onde

$$z(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s^2+4)}\} = \frac{1}{2}\text{sen}2t$$

Por (11)e aplicando transformada de Laplace inversa, temos

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) + u_\pi(t)h(t-\pi) + z(t-\pi/2)u_{\pi/2}(t) \\ &= \frac{1}{6}\left(2\text{sen}t - \text{sen}2t)\right) + \frac{1}{6}u_\pi(t)(2\text{sen}(t-\pi) - \text{sen}(2t-2\pi)) + \frac{1}{2}\text{sen}2(t-\pi/2)u_{\pi/2}(t) \\ &= \frac{1}{6}\left(2\text{sen}t - \text{sen}2t)\right) - \frac{1}{6}u_\pi(t)(2\text{sen}t + \text{sen}2t) - \frac{1}{2}\text{sen}(2t)\, u_{\pi/2}(t). \end{aligned}$$

Professores: Cecilia, Jaques, Marcelo,Marisa, Patricia, Pedro.