Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — 1º Prova Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Química — **Turmas**: Engenharias 2º Sem/2011

Código: MAC 248 — **Data**: 11/10/2011

Questão 1. (2,5 pontos)

(a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = xe^x$. Pede-se:

- Ache a expansão em séries de potência de $f(x) = xe^x$ em torno do ponto $x = 0$.
- Escreva xe^x em funcao de $(x-1)e^{x-1}$ e e^{x-1}.
- Usando os resultados dos itens anteriores, ache a expansão em séries de potência de $f(x) = xe^x$ em torno do ponto $x = 1$.
- Calcule o raio de convergência da série encontrada no item anterior.

(b) (1,0 ponto) Estude a convergência das seguintes séries:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2sen(n)}{n^3+n\ln(n)}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$.

Questão 2. (2,5 pontos)

Considere a equação diferencial

$$(1-x)y''(x) - xy'(x) - y(x) = 1.$$

(a) (0,5 ponto) Mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário da equação diferencial e dê um valor mínimo para o raio de convergência da solução em serias de potência em torno de $x = 0$.

(b) (1,5 pontos) Determine a relação de recorrência geral para $n \geq 1$.

(c) (0,5 ponto) Determine os cinco primeiros termos da solução geral.

Questão 3. (2,0 pontos)

Encontre a transformada de Laplace das funções:

(a) $f(t) = u_2(t)\delta(t-10) + u_{10}(t)\delta(t-2)$;

(b) $f(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad t < 1 \\ 2-t & \text{se} \quad t \geq 1 \end{cases}$.

Questão 4. (3,0 pontos)

Resolva o seguinte problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = 5e^t \,\mathrm{sen} t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 5. \end{cases}$$

Transformadas de Laplace **NO VERSO**

Tabela básica de transformada de Laplace.

Suponha que $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = G(s) \quad \text{se} \quad s > \alpha$

- $\mathcal{L}\left\{e^{bt}g(t)\right\} = G(s-b) \quad \text{se } s > \alpha + b$
- $\mathcal{L}\left\{g(ct)\right\} = \dfrac{1}{c}G(\dfrac{s}{c}) \quad \text{se} \quad s > c\alpha \text{ e } c > 0$
- $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} \quad \text{se } s > 0$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \dfrac{s}{s^2+a^2} \quad \text{se } s > 0$
- $\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$
- $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2} \quad \text{se } s > |a|$
- $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-a)h(t)\,dt = h(a) \quad \text{se} \quad h(t)$ for contínua em $[0,\infty[$.
- $\mathcal{L}\{\displaystyle\int_0^t g(\xi)\,d\xi\} = \dfrac{G(s)}{s}$
- $\mathcal{L}\left\{g^{(n)}(t)\right\} = s^nG(s) - s^{n-1}g(0) - \cdots - g^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad s > a$
- $\mathcal{L}\{\, t\,g(t)\,\} = -\dfrac{d}{ds}G(s)$