Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Matemática

Departamento de Métodos Matemáticos

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral IV — 1º Prova Unificada

Unidades: Escola Politécnica e Escola de Quimica — **Turmas**: Engenharias 1^o Sem/2011

Código: MAC 248 — **Data**: 12/05/2011

---

1. (1,0 p) Analise a convergência das séries e escolha somente duas das séries abaixo indicadas:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^3}$, (0,5)

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\sqrt{n}}{5n+3}$, (0,5)

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,n^2}{n!}$. (0,5)

   OBS: Não responda mais de duas. Se isto ocorrer serão corregidas as duas primeiras.

2. (1,5 p) Obtenha a representação da função $f(x) = e^x + x^2$ por sua correspondente série de Taylor em $x_0 = -1$ e calcule o raio de convergência da série obtida.

3. (2,5 p) Considere a equação diferencial, linear de segunda ordem

$$(3 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0.$$

   (a) (1.5 p) Verifique que $x_0 = 0$ é um ponto ordinário da equação e encontre a relação de recorrência associada à equação dada,

   (b) (1,0 p) Determine a solução $y(x)$ tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

4. (2,5 p) Resolva o seguinte problema de valor inicial utilizando a transformada de Laplace

$$\begin{cases} 2y''(t) + y'(t) + 4y(t) = & \delta(t - \frac{\pi}{6}) \cdot \sin t, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$

5. Resolver

   (a) (1.0) Calcule a transformada de Laplace $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ da função $g(t) = e^{-2t} f(t)$ onde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1, \\ 0 & 1 \le t < 2, \\ 1 & 2 \le t < 3, \\ 0 & 3 \le t. \end{cases} \tag{2}$$

   (b) (1,5) Calcule a transformada de Laplace inversa $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ da função

$$H(s) = \frac{(2s+1)e^{-3s}}{s(4s^2+4s+5)} + \frac{2}{(s+2)^2}.$$

Transformadas de Laplace **NO VERSO**

Tabela básica de transformada de Laplace.

Suponha que $\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} = G(s) \quad \text{se} \quad s > \alpha$

- $\mathcal{L}\left\{u_a(t) \cdot g(t-a)\right\} = e^{-as}G(s)$
- $\mathcal{L}\left\{e^{bt}g(t)\right\} = G(s-b) \quad \text{se } s > \alpha + b$
- $\mathcal{L}\left\{g(ct)\right\} = \frac{1}{c}G(\frac{s}{c}) \quad \text{se} \quad s > c\alpha \ \text{ e } \ c > 0$
- $\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \dfrac{a}{s^2+a^2} \quad \text{se } s > 0$
- $\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$
- $\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \dfrac{s}{s^2-a^2} \quad \text{se } s > |a|$
- $\displaystyle\int_0^\infty \delta(t-a)h(t)\,dt = h(a) \quad \text{se} \quad h(t)$ for contínua em $[0,\infty[$.
- $\mathcal{L}\{\displaystyle\int_0^t g(\xi)\,d\xi\,\} = \dfrac{G(s)}{s}$
- $\mathcal{L}\left\{g^{(n)}(t)\right\} = s^nG(s) - s^{n-1}g(0) - \cdots - g^{(n-1)}(0)$
- $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad s > a$
- $\mathcal{L}\{\,t\,g(t)\,\} = -\dfrac{d}{ds}G(s)$

Professores: Carlos Ferraris, Katrin Grit, I Shih, Pedro Gamboa, Xavier Carvajal.